

注意：・答えは日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に、数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては白紙答案より低い点数になる場合がある。careless miss でそのような事はないが、「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。

・在籍番号欄について：2年生以上は10桁の在籍番号を書く事。1年生は出席番号(多くは2桁)でよい。

1 次の問に答えよ。(問題は次ページに続く)

(1)  $y = \frac{6x^3 + x^2 + 28x - 4}{(x^2 + 9)(x^2 - 4)}$  を部分分数分解せよ。

$f(x) = (x^2 + 9)(x^2 - 4), g(x) = 6x^3 + x^2 + 28x - 4$  とおくと、1次以下の関数  $g_1(x), g_2(x)$  を用いて

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g_1(x)}{x^2 + 9} + \frac{g_2(x)}{x^2 - 4}$$

と部分分数展開できる。これを通分することにより

$$g(x) = g_1(x)(x^2 - 4) + g_2(x)(x^2 + 9) \tag{1}$$

が恒等的に成り立つ。(1)に  $x = 2$  を代入すると

$$104 = g(2) = g_1(2)(2^2 - 4) + g_2(2)(2^2 + 9) = 13g_2(2)$$

であり、(1)に  $x = -2$  を代入すると

$$-104 = g(-2) = g_1(-2)((-2)^2 - 4) + g_2(-2)((-2)^2 + 9) = 13g_2(-2)$$

である。 $g_2(x) = ax + b$  とすると、 $a = 4, b = 0$  を得る。

$$\begin{aligned} \frac{g_1(x)}{x^2 + 9} &= \frac{g(x)}{f(x)} - \frac{4x}{x^2 - 4} = \frac{6x^3 + x^2 + 28x - 4 - 4x(x^2 + 9)}{f(x)} \\ &= \frac{(2x + 1)(x^2 - 4)}{(x^2 + 9)(x^2 - 4)} = \frac{2x + 1}{(x^2 + 9)} \end{aligned}$$

より

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2x + 1}{x^2 + 9} + \frac{4x}{x^2 - 4}$$

(2) (1)で求めた部分分数を通分せよ。

(1)で求めた部分分数が正しければ、通分すれば  $\frac{6x^3 + x^2 + 28x - 4}{(x^2 + 9)(x^2 - 4)}$  になる。

(3)  $J = \int \frac{1}{x^2 + 9} dx$  を求めよ。ただし  $\int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \arctan t$  を使用してもよい。

$x = 3t$  とおくと  $\frac{dx}{dt} = 3$  より

$$J = \int \frac{1}{(3t)^2 + 9} 3 dt = \frac{1}{3} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{3} \arctan t = \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3}$$

別紙にも問題あり

学 科		在 番 籍 号		氏 名	
--------	--	------------------	--	--------	--

(4)  $I = \int \frac{6x^3 + x^2 + 28x - 4}{(x^2 + 9)(x^2 - 4)} dx$  を求めよ。

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{6x^3 + x^2 + 28x - 4}{(x^2 + 9)(x^2 - 4)} dx = \int \left( \frac{2x + 1}{x^2 + 9} + \frac{4x}{x^2 - 4} \right) dx \\ &= \int \frac{2x}{x^2 + 9} dx + \int \frac{1}{x^2 + 9} dx + \int \left( \frac{2}{x + 2} + \frac{2}{x - 2} \right) dx \end{aligned}$$

$t = x^2 + 9$  とおくと  $\frac{dt}{dx} = 2x$  より

$$\int \frac{2x}{x^2 + 9} dx = \int \frac{2x}{t} \frac{1}{2x} dt = \int \frac{1}{t} dt = \log |t| = \log(x^2 + 9)$$

よって

$$I = \log(x^2 + 9) + \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + 2 \log |x + 2| + 2 \log |x - 2|$$

## 2 不定積分

$$I = \int \frac{1}{\cos x} dx$$

を次にしたがって求めよ。 $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  とおく。

(1)  $\cos x$  を  $t$  を用いて表せ。

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

(2)  $\frac{dt}{dx}$  を  $t$  を用いて表せ。

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} (1 + t^2)$$

(3) 不定積分  $I$  を求めよ。

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1 + t^2}{1 - t^2} \frac{2}{1 + t^2} dt = \int \frac{2}{1 - t^2} dt = \int \left( \frac{1}{1 + t} + \frac{1}{1 - t} \right) dt \\ &= \log |1 + t| - \log |1 - t| = \log \left| 1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| - \log \left| 1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| \end{aligned}$$

3 次の問に答えよ。(問題は次ページに続く)

(1) 微分方程式

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \quad (*)$$

の一般解を複素数値関数の範囲で求めよ。解く方法は何でもよいが、演算子法を用いるときは

$$D - \lambda = e^{\lambda x} D e^{-\lambda x}$$

が役に立つかもしれない。

微分方程式 (\*) を演算子を用いて書き直すと

$$(D^2 - 2D + 5)y = 0$$

となる。 $D^2 - 2D + 5 = (D - (1 - 2i))(D - (1 + 2i))$  なので  $u = (D - (1 + 2i))y$  とおくと

$$e^{(1-2i)x} D e^{-(1-2i)x} u = 0$$

$v = e^{-(1-2i)x} u$  とおくと  $Dv = 0$  となる。これを積分すると

$$v = C_1$$

となるので、 $u = C_1 e^{(1-2i)x}$  を得る。 $(D - (1 + 2i))y = u = C_1 e^{(1-2i)x}$  を書き直すと

$$e^{(1+2i)x} D e^{-(1+2i)x} y = C_1 e^{(1-2i)x}$$

両辺に  $e^{-(1+2i)x}$  をかけて  $z = e^{-(1+2i)x} y$  とおくと

$$Dz = C_1 e^{-4ix}$$

両辺を積分すると

$$z = \frac{C_1}{-4i} e^{-4ix} + C_2$$

$\frac{C_1}{-4i}$  をあらためて  $C_2$  と、 $C_2$  を  $C_1$  とおき直すと

$$y = C_1 e^{(1+2i)x} + C_2 e^{(1-2i)x}$$

(2) 前問の微分方程式 (\*) の一般解を実数値関数の範囲で求めよ。オイラーの公式  $[e^{ix} = \cos x + i \sin x]$  を既知としてよい。

オイラーの公式より

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(1+2i)x} + C_2 e^{(1-2i)x} = C_1 e^x e^{2ix} + C_2 e^x e^{-2ix} = C_1 e^x (\cos 2x + i \sin 2x) + C_2 e^x (\cos(-2x) + i \sin(-2x)) \\ &= C_1 e^x (\cos 2x + i \sin 2x) + C_2 e^x (\cos 2x - i \sin 2x) = (C_1 + C_2) e^x \cos 2x + (C_1 i - C_2 i) e^x \sin 2x \end{aligned}$$

$A_1 = C_1 + C_2, A_2 = C_1 i - C_2 i$  とおくと

$$y = A_1 e^x \cos 2x + A_2 e^x \sin 2x$$

別紙にも問題あり

学 科		在 番 籍 号		氏 名	
--------	--	------------------	--	--------	--

(3) 微分方程式

$$y'' - 2y' + 5y = \sin 3x \quad (**)$$

の一般解を求めよ。(解は実数値関数の範囲でも複素数値関数の範囲でもよい。)ただし, (1) の微分方程式 (\*) の一般解は既知としてよい。また

$$\text{「(**) の一般解」} = \text{「(**) の特殊解」} + \text{「(*) の一般解」}$$

も既知としてよい。

微分方程式 (\*\*) の特殊解  $y_1$  を

$$y_1 = A \sin 3x + B \cos 3x$$

だと予想する。微分方程式 (\*\*) に代入すると

$$\begin{aligned} y_1'' - 2y_1' + 5y_1 &= -9A \sin 3x - 9B \cos 3x - 2(3A \cos 3x - 3B \sin 3x) + 5(A \sin 3x + B \cos 3x) \\ &= (-4A + 6B) \sin 3x + (-4B - 6A) \cos 3x \\ &= \sin 3x \end{aligned}$$

となる。よって  $-4A + 6B = 1$  かつ  $-4B - 6A = 0$  である。これを解くと  $A = -\frac{1}{13}, B = \frac{3}{26}$  となる。よって

$$y_1 = -\frac{1}{13} \sin 3x + \frac{3}{26} \cos 3x$$

は特殊解である。

(1) または (2) の結果より (\*\*) の一般解は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{13} \sin 3x + \frac{3}{26} \cos 3x + C_1 e^{(1+2i)x} + C_2 e^{(1-2i)x} && \text{(複素数値関数としての表示)} \\ &= -\frac{1}{13} \sin 3x + \frac{3}{26} \cos 3x + A e^x \sin 2x + B e^x \cos 2x && \text{(実数値関数としての表示)} \end{aligned}$$

4  $D$  を微分演算子,  $f(x)$  を関数とし,  $L = D(D + x^2)$  とする。微分方程式

$$Ly = f(x) \quad (1)$$

の一般解が

$$Ly = 0 \quad (2)$$

の一般解と, 微分方程式 (1) の特殊解の和で表されることを示せ。 $Dx^2 = 2x + x^2 D$  に留意すること。

$y$  を微分方程式 (1) の一般解,  $y_1$  を微分方程式 (1) の特殊解とし,  $y_2 = y - y_1$  とおく。

$$\begin{aligned} Ly_2 &= D(D + x^2)y_2 = D(Dy_2 + x^2y_2) = D^2y_2 + 2xy_2 + x^2Dy_2 = D^2(y - y_1) + 2x(y - y_1) + x^2D(y - y_1) \\ &= D^2y - D^2y_1 + 2xy - 2xy_1 + x^2Dy - x^2Dy_1 = D^2y + 2xy + x^2Dy - D^2y_1 - 2xy_1 - x^2Dy_1 \\ &= (D^2 + 2x + x^2D)y - (D^2 + 2x + x^2D)y_1 = (D^2 + Dx^2)y - (D^2 + Dx^2)y_1 \\ &= D(D + x^2)y - D(D + x^2)y_1 = f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

よって  $y_2$  は微分方程式 (2) の解である。 $y = y_1 + y_2$  なので和で表されることが分かる。

5 授業についての感想, 数学について思う事などがあれば記せ (5)。