| 解析学 I 第 1 回試験 |
|---|

2017–11–16　　河野

**注意**：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：10 桁の在籍番号を書く事。

**1** $y=(x+2)^2$ を定義に基いて微分せよ。

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+2)^2-(x+2)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+2)^2+2(x+2)h+h^2-(x+2)^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\,(2(x+2)+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2(x+2)+h) = 2(x+2)$$

**2** $y=\cos\left(x^4+x^3\right)e^{\left(x^3+x^2\right)}$ を微分せよ。$(\cos x)'=-\sin x$，$(e^x)'=e^x$ 等の諸公式を用いてよい。

$$y' = -(4x^3+3x^2)\sin\left(x^4+x^3\right)e^{\left(x^3+x^2\right)} + (3x^2+2x)\cos\left(x^4+x^3\right)e^{\left(x^3+x^2\right)}$$

**3** 関数 $y=f(x)$ に対し $x=a+h$，$\varepsilon(h)=\dfrac{f(a+h)-(A+Bh+Ch^2)}{h^2}$ とおく。$\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立するとき $g(h)=A+Bh+Ch^2$ を $x=a$ で $y=f(x)=f(a+h)$ を近似する 2 次式という。
$y=f(x)=\sin x$ とする。$x=\dfrac{\pi}{4}$ で $y=f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{4}+h\right)$ を近似する 2 次式を定義に基づいて求めよ。ロピタルの定理を使用してもよい。

$\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ より $\lim\limits_{h\to 0}h\varepsilon(h)=0$，$\lim\limits_{h\to 0}h^2\varepsilon(h)=0$ が成立する。

$$0=\lim_{h\to 0}h^2\varepsilon(h)=\lim_{h\to 0}\left(f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-g(h)\right)=\lim_{h\to 0}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\left(A+Bh+Ch^2\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-A$$
$$0=\lim_{h\to 0}h\varepsilon(h)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+Bh+Ch^2\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-B-2Ch}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}-B$$
$$0=\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}-Ah-Ch^2}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-A-2Ch}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-2C}{2}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}-2C}{2}$$

よって求める 2 次式は

$$g(h)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}h-\frac{1}{2\sqrt{2}}h^2$$

**裏にも問題あり。別紙にも問題あり**

| 学科 | | 在番籍号 | | 氏名 | |
|---|---|---|---|---|---|

**4** テーラーの定理とは

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

を満たす $\theta$ $(0<\theta<1)$ が存在する，というものである。$R_n=\dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を剰余項と呼ぶ。

剰余項 $R_n$ を切り捨て $f(x)$ の近似値として，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ を採用することにより近似計算をすることができる。このとき誤差の絶対値は $|R_n|$ である。

これを用いて $\sin\dfrac{3\pi}{16}$ の近似計算を行いたい。$f(x)=\sin x, a=\dfrac{\pi}{4}$ としてこの方法を適用する。ただし，誤差の絶対値が $10^{-3}$ より小さくなるように $n$ を決定し，その $n$ を用いて近似値を計算をせよ。近似値の中の $\pi$ はそのままでよい。誤差評価では $\pi<4$ を使用してよい。

$a=\dfrac{\pi}{4}, x=\dfrac{3\pi}{16}, c=a+\theta(x-a)$ とおくと $x-a=-\dfrac{\pi}{16}$ である。$f^{(n)}(x)$ は $\pm\sin x, \pm\cos x$ のいずれかなので $\left|f^{(n)}(x)\right|\leq 1$ である。よって剰余項は

$$\left|R_n\right|=\left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\left(-\frac{\pi}{16}\right)^n\right|\leq\frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{16}\right)^n\leq\frac{1}{n!}\left(\frac{4}{16}\right)^n=\frac{1}{n!\cdot 4^n}$$

と評価できる。$\dfrac{1}{n!\cdot 4^n}\leq 10^{-3}$ のとき即ち

$$n!\cdot 4^n\geq 10^3$$

のとき $\left|R_n\right|\leq 10^{-3}$ となる。$n=4$ のとき

$$4!\cdot 4^4=6144\geq 10^3$$

となるので条件を満たしている。

$$\sin\frac{3\pi}{16}\fallingdotseq\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{k!}\left(\frac{\pi}{16}\right)^k$$

$f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x, f^{(3)}(x)=-\cos x$ より

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

より

$$\sin\frac{3\pi}{16}\fallingdotseq\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{16}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{16}\right)^2-\frac{1}{6\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{16}\right)^3$$

**5** $y=f(x)=x\log x$ を $x=3$ でテーラー展開することを考える。次の問に答えながら，テーラー展開を求めよ。

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$，$f^{(3)}(x)$，$f^{(4)}(x)$，$f^{(5)}(x)$ を求めよ。

$$f'(x)=\log x+1,\qquad f''(x)=\frac{1}{x},\qquad f^{(3)}(x)=-\frac{1}{x^2},\qquad f^{(4)}(x)=\frac{2}{x^3},\qquad f^{(5)}(x)=-\frac{6}{x^4}$$

(2) ある自然数以上の整数 $n$ に対し $f^{(n)}(x)$ を予想し，それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

$n\geq 2$ に対し $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}$ と予想できる。これを数学的帰納法で証明する。$n=2$ のとき

$$f^{(2)}(x)=\frac{1}{x}=(-1)^2\frac{(2-2)!}{x^{2-1}}$$

より成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $f^{(k)}(x)=(-1)^k\dfrac{(k-2)!}{x^{k-1}}$ を仮定する。これを微分する。

$$f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left((-1)^k\frac{(k-2)!}{x^{k-1}}\right)'=(-1)^k(k-2)!\,(-(k-1))\,\frac{1}{x^k}$$
$$=(-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k}=(-1)^{k+1}\frac{((k+1)-2)!}{x^{(k+1)-1}}$$

よって $k+1$ でも成立する。

(3) $y=f(x)=x\log x$ を $x=3$ でテーラー展開せよ。

$f(3)=3\log 3, f'(3)=\log 3+1, f^{(k)}(3)=(-1)^k\dfrac{(k-2)!}{3^{k-1}}$ なので

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(3)}{k!}(x-3)^k=f(3)+f'(3)(x-3)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{f^{(k)}(3)}{k!}(x-3)^k$$
$$=3\log 3+(\log 3+1)(x-3)+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{(k-2)!}{3^{k-1}k!}(x-3)^k$$
$$=3\log 3+(\log 3+1)(x-3)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^{k-1}k(k-1)}(x-3)^k$$

**裏にも問題あり。別紙にも問題あり**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 学科 | | 在籍番号 | | 氏名 | |

$\boxed{6}$ 以下に書かれているのは平均値の定理の証明の最初の部分である。文章を続けて証明を完成させよ。平均値の定理とは「関数 $f$ が $[\,a,b\,]$ で連続，$(\,a,b\,)$ で微分可能ならば $a<c<b$ および

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を満たす $c$ が存在する」というものである。

**[証明]**　証明にはロルの定理「関数 $f$ が $[\,a,b\,]$ で連続，$(\,a,b\,)$ で微分可能で $f(a)=f(b)$ ならば $a<c<b$ および $f'(c)=0$ を満たす $c$ が存在する」を用いる。

$F(x)=(f(b)-f(a))(x-a)-(f(x)-f(a))(b-a)$ とおく。

$$F(a)=(f(b)-f(a))(a-a)-(f(a)-f(a))(b-a)=0$$
$$F(b)=(f(b)-f(a))(b-a)-(f(b)-f(a))(b-a)=0$$

より $F$ はロルの定理の仮定をみたしている。よって

$$F'(c)=0 \qquad (a<c<b)$$

となる $c$ が存在する。

$$F'(x)=(f(b)-f(a))-f'(x)(b-a)$$

より

$$F(c)=(f(b)-f(a))-f'(c)(b-a)=0$$

これを変形すると

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

が得られる。

$\boxed{7}$ 数列 $a_n$ を $a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$ で帰納的に定義する。

(1) 任意の自然数 $n$ に対し $a_{n+1}-a_n\geq 0$ が成立することを数学的帰納法で示せ。

$a_2=\dfrac{1}{2}a_1+1=1$ より $a_2-a_1=1-0=1\geq 0$ となり $n=1$ のとき成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $a_{k+1}-a_k\geq 0$ を仮定する。

$$a_{k+2}-a_{k+1}=\frac{1}{2}a_{k+1}+1-\left(\frac{1}{2}a_k+1\right)=\frac{1}{2}\left(a_{k+1}-a_k\right)\geq 0$$

よって $k+1$ でも成立する。

(2) 任意の自然数 $n$ に対し $a_n\leq 2$ が成立することを示せ。

$a_1=1\leq 2$ なので $n=1$ のとき成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $a_k-2\leq 0$ を仮定する。

このとき両辺を $\dfrac{1}{2}$ 倍して $\dfrac{1}{2}a_k-1\leq 0$ となる。

$$\frac{1}{2}a_k-1=\frac{1}{2}a_k+1-2=a_{k+1}-2$$

なので $a_{k+1}-2\leq 2$ となり $k+1$ でも成立している。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。ただし,「有界な単調数列は収束する」という定理を使用してよい。

(1),(2) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ は収束する。極限値を $\alpha$ とし漸化式において $n\to\infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}a_n+1$$

即ち $\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha+1$ より $\alpha=2$ を得る。