解析学 I 第 1 回試験

2017–11–16　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：10 桁の在籍番号を書く事。

1 $y=(x+2)^2$ を定義に基いて微分せよ。

2 $y=\cos\left(x^4+x^3\right)e^{\left(x^3+x^2\right)}$ を微分せよ。$(\cos x)'=-\sin x$, $(e^x)'=e^x$ 等の諸公式を用いてよい。

3 関数 $y=f(x)$ に対し $x=a+h$, $\varepsilon(h)=\dfrac{f(a+h)-(A+Bh+Ch^2)}{h^2}$ とおく。$\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ が成立するとき $g(h)=A+Bh+Ch^2$ を $x=a$ で $y=f(x)=f(a+h)$ を近似する 2 次式という。
$y=f(x)=\sin x$ とする。$x=\dfrac{\pi}{4}$ で $y=f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{4}+h\right)$ を近似する 2 次式を定義に基づいて求めよ。ロピタルの定理 [$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{g(h)}$ が不定形のとき $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{g(h)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(h)}{g'(h)}$] を使用してもよい。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ テーラーの定理とは

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

を満たす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する，というものである。$R_n = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$ を剰余項と呼ぶ。

剰余項 R_n を切り捨て $f(x)$ の近似値として，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ を採用することにより近似計算をすることができる。このとき誤差の絶対値は $|R_n|$ である。

これを用いて $\sin\dfrac{3\pi}{16}$ の近似計算を行いたい。$f(x) = \sin x, a = \dfrac{\pi}{4}$ としてこの方法を適用する。ただし，誤差の絶対値が 10^{-3} より小さくなるように n を決定し，その n を用いて近似値を計算をせよ。近似値の中の π はそのままでよい。誤差評価では $\pi < 4$ を使用してよい。

$\boxed{\mathbf{5}}$ $y=f(x)=x\log x$ を $x=3$ でテーラー展開することを考える。次の問に答えながら，テーラー展開を求めよ。

(1) $f'(x)$ および $f''(x)$，$f^{(3)}(x)$，$f^{(4)}(x)$，$f^{(5)}(x)$ を求めよ。

(2) ある自然数以上の整数 n に対し $f^{(n)}(x)$ を予想し，それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

(3) $y=f(x)=x\log x$ を $x=3$ でテーラー展開せよ。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{6}}$ 以下に書かれているのは平均値の定理の証明の最初の部分である。文章を続けて証明を完成させよ。平均値の定理とは「関数 f が $[\,a,\,b\,]$ で連続，$(\,a,\,b\,)$ で微分可能ならば $a<c<b$ および

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を満たす c が存在する」というものである。

[証明] 証明にはロルの定理「関数 f が $[\,a,\,b\,]$ で連続，$(\,a,\,b\,)$ で微分可能で $f(a)=f(b)$ ならば $a<c<b$ および $f'(c)=0$ を満たす c が存在する」を用いる。

$F(x)=(f(b)-f(a))(x-a)-(f(x)-f(a))(b-a)$ とおく。

$\boxed{\mathbf{7}}$ 数列 a_n を $a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$ で帰納的に定義する。

(1) 任意の自然数 n に対し $a_{n+1}-a_n\geq 0$ が成立することを数学的帰納法で示せ。

(2) 任意の自然数 n に対し $a_n\leq 2$ が成立することを示せ。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。ただし,「有界な単調数列は収束する」という定理を使用してよい。