解析学 I 第 2 回試験

2017–12–14　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。

・在籍番号欄について：10 桁の在籍番号を書く事。

1　次の関数 $z = f(x, y)$ に対し以下の問に答えよ。

$$f(x,y) = \begin{cases} x + 2y + \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1)　$(x,y) \neq (0,0)$ のとき 導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ。また $f_x(0,0)$ を求めよ。

$$f_x(x,y) = 1 + \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = 1 + \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(h + 2\cdot 0 + \frac{h\cdot 0}{h^2+0^2} - 0\right) = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

(2)　$f(x,y)$ が $(0,0)$ で全微分可能かどうか調べよ。

$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能とは定数 A, B, C が存在して

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(a+h, b+k) - (A + Bh + Ck)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ が成立することをいう。全微分可能のとき $A = f(a,b), B = f_x(a,b), C = f_y(a,b)$ となることは既知としてよい。

(1) と同様に計算すると $f_y(0,0) = 2$ となる。$f(x,y)$ が $(0,0)$ で全微分可能であると仮定する。

$$\varepsilon(h,k) = \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(h + 2k + \frac{hk}{h^2+k^2} - (h+2k)\right) = \frac{hk}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^3}$$

$h = r\cos\theta, k = r\sin\theta$ とおくと $(h,k) \to (0,0)$ のとき $r \to +0$ となる。

$$\varepsilon(h,,k) = \frac{r\cos\theta r\sin\theta}{\left(\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\right)^3} = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^3} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}$$

$\varepsilon(h,k)$ は $r \to +0$ のとき 0 に収束しない。これは矛盾である。よって全微分可能でない。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $z=x+y, s=x^2+y^2, t=x^2y^2$ について次の問に答えよ。

(1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)}=\begin{pmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}$$

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}=\left(\frac{D(s,t)}{D(x,y)}\right)^{-1}=\frac{1}{4xy(x^2-y^2)}\begin{pmatrix} 2x^2y & -2y \\ -2xy^2 & 2x \end{pmatrix}=\frac{1}{2xy(x^2-y^2)}\begin{pmatrix} x^2y & -y \\ -xy^2 & x \end{pmatrix}$$

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

$$x_s=\frac{x^2y}{2xy(x^2-y^2)}=\frac{x}{2(x^2-y^2)}, y_s=\frac{-xy^2}{2xy(x^2-y^2)}=\frac{-y}{2(x^2-y^2)}\text{ より}$$

$$z_s=z_xx_s+z_yy_s=1\cdot\frac{x}{2(x^2-y^2)}+1\cdot\frac{-y}{2(x^2-y^2)}=\frac{x-y}{2(x-y)(x+y)}=\frac{1}{2(x+y)}$$

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t\partial s}$ を求めよ。

$$z_s=\frac{1}{2(x+y)}\text{ より }(z_s)_x=-\frac{1}{2(x+y)^2}, (z_s)_y=-\frac{1}{2(x+y)^2}$$

$$\begin{aligned} z_{st}=(z_s)_t=(z_s)_x x_t+(z_s)_y y_t &= -\frac{1}{2(x+y)^2}\frac{-y}{2xy(x^2-y^2)}-\frac{1}{2(x+y)^2}\frac{x}{2xy(x^2-y^2)} \\ &= -\frac{x-y}{4xy(x+y)^2(x-y)(x+y)}=-\frac{1}{4xy(x+y)^3} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 3 次元の極座標

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$$

を考える。このときヤコビ行列 $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}$ およびヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ (ヤコビ行列の行列式) を計算せよ。

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\quad=\quad\det\left(\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}\right)=r^2\sin\theta$$

となる。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $z = f(x,y) = x^4 + y^4 - 3(x+y)^2$ について次の問に答えよ。

(1) $z = f(x,y)$ の臨界点 ($\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ かつ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる点) を求めよ。

$$z_x = 4x^3 - 6(x+y), \quad z_y = 4y^3 - 6(x+y)$$

なので $z_x = 0$ から $z_y = 0$ を引き 4 で割ると

$$0 = x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

を得る。よって $x - y = 0$ または $x^2 + xy + y^2 = 0$ が成立する。$x^2 + xy + y^2 = 0$ が成立しているときは $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \dfrac{1}{2}y\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2 = 0$ より $x = 0, y = 0$ となるので $x - y = 0$ の場合のみ考えればよい。

$$0 = z_x(x,x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3) = 4x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

より $x = 0$ または $x = \sqrt{3}$ または $x = -\sqrt{3}$ となる。以上により臨界点は

$$(x,y) = (0,0), (\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

である。

(2) $z = f(x,y)$ の臨界点におけるヘッシャンを計算せよ。ヘッシャンとは $H(x,y) = z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2$ である。

$$z_{xx} = 12x^2 - 6, \quad z_{xy} = -6, \quad z_{yy} = 12y^2 - 6$$

なので

$$H(x,y) = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 36(2x^2 - 1)(2y^2 - 1) - 36$$

となる。よって

$$H(0,0) = 0, \quad H(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = H(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = 36 \cdot 24$$

となる。

(3) $z = f(x,y)$ の極点を求めよ。

$z_{xx}(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = z_{xx}(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) > 0$ なので $(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ は極点である。

$(x,y) = (0,0)$ が極点かどうかを調べる。

$f(x,y)$ を x 軸に制限して $g(x) = f(x,0) = x^4 - 3x^2$ とする。$g'(x) = 4x^3 - 6x, g''(x) = 12x^2 - 6$ より $g'(0) = 0, g''(0) = -6 < 0$ となるので $g(x)$ は $x = 0$ で 1 変数関数として極大である。$(0,0)$ の十分近くに $f(x,0) < f(0,0)$ となる点が存在する。

次に $x + y = 0$ 上での z の動きを見よう。$h(x) = z(x, -x)$ とおくと $h(x) = 2x^4$ となるので $x = 0$ で極小である。よって $(0,0)$ の十分近くの点 (x,y) で，$f(x,y) > f(0,0)$ となる点がある。

十分近くに $z(0,0)$ より大きい点も小さい点もあるので，z は $(0,0)$ で極値をとらない。

以上により極点は $(x,y) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$ および $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{5}}$ $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leq 4 \right\}$ とする。D で定義された関数 $z = f(x,y) = x^2 + (y+1)^2$ に最大値が存在すれば，そのことを証明し最大値を求めよ。存在しなければ存在しないことを証明せよ。

$\partial D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 = 4 \right\} \subseteq D$ なので D は閉集合である。また D は原点を中心とする半径 4 の円なので有界である。また $z = f(x,y)$ は連続関数である。

よって最大値定理より最大値が存在する。

最大値を与える点は境界上または内部の点であるが，内部の点の場合最大値を与える点は臨界点である。

よって境界上の値の最大値と内部の臨界点での値の大きいほうが最大値である。

最初に境界上での関数の値を考える。境界上では $x^2+y^2=4$ なのでこれを $z = f(x,y)$ に代入する。

$$z = f(x,y) = x^2+y^2+2y+1 = (x^2+y^2)+2y+1 = 4+2y+1 = 2y+5$$

境界上では y の座標が大きいほど $z = f(x,y)$ は大きい。境界上で y が最大になるのは $y=2$ であり，このとき x は 0 である。よって境界上での最大値は

$$f(0,2) = 9$$

である。

次に内部の臨界点を調べる。

$$z_x = 2x, \qquad z_y = 2(y+1)$$

なので臨界点では $(x,y) = (0,-1)$ である。このとき

$$f(0,-1) = 0$$

である。

よって $(x,y) = (0,2)$ のとき最大値は 9 をとる。

$\boxed{\mathbf{6}}$ $F(x,y) = 2x^2 - 2xy + 3y^2 - 1$ とする。点 $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ において，$F(x,y)=0$ が定める陰関数 $y = f(x)$ について $f'(0)$ を求めよ。

$F(x, f(x)) = 0$ の両辺を x で微分すると

$$4x - 2y - 2xy' + 6yy' = 0$$

である。$f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ なので

$$4 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 2 \cdot 0 \cdot f'(0) + 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} f'(0) = 0$$

より $f'(0) = \dfrac{1}{3}$ である。