解析学 I 第 2 回試験

2017–12–14　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：10 桁の在籍番号を書く事。

1 次の関数 $z = f(x, y)$ に対し以下の問に答えよ。

$$f(x,y) = \begin{cases} x + 2y + \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき 導関数 $f_x(x, y)$ を求めよ。また $f_x(0, 0)$ を求めよ。

(2) $f(x, y)$ が $(0, 0)$ で全微分可能かどうか調べよ。

$f(x, y)$ が (a, b) で全微分可能とは定数 A, B, C が存在して

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(a+h, b+k) - (A + Bh + Ck)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

とおくとき $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ が成立することをいう。全微分可能のとき $A = f(a, b), B = f_x(a, b), C = f_y(a, b)$ となることは既知としてよい。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $z = x + y, s = x^2 + y^2, t = x^2y^2$ について次の問に答えよ。

(1) $\dfrac{D(s,t)}{D(x,y)}$ を求めよ。

(2) $\dfrac{D(x,y)}{D(s,t)}$ を求めよ。

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ。

(4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t \partial s}$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 3 次元の極座標

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

を考える。このときヤコビ行列 $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}$ およびヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ (ヤコビ行列の行列式) を計算せよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $z = f(x,y) = x^4 + y^4 - 3(x+y)^2$ について次の問に答えよ。

(1) $z = f(x,y)$ の臨界点 ($\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ かつ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる点) を求めよ。

(2) $z = f(x,y)$ の臨界点におけるヘッシャンを計算せよ。ヘッシャンとは $H(x,y) = z_{xx}z_{yy} - (z_{xy})^2$ である。

(3) $z = f(x,y)$ の極点を求めよ。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{5}}$ $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$ とする。D で定義された関数 $z = f(x, y) = x^2 + (y+1)^2$ に最大値が存在すれば，そのことを証明し最大値を求めよ。存在しなければ存在しないことを証明せよ。

$\boxed{\mathbf{6}}$ $F(x, y) = 2x^2 - 2xy + 3y^2 - 1$ とする。点 $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ において，$F(x, y) = 0$ が定める陰関数 $y = f(x)$ について $f'(0)$ を求めよ。