数学序論第 1 回試験

2006–6–20　　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
　証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。
　採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
　在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 P, Q を命題とする。$\neg P$，$P \wedge Q$，$P \vee Q$，$P \Longrightarrow Q$ の真理表は次のようになっている。$P \Longrightarrow Q$ と $\neg P \vee Q$ が同値であることを真理表を用いて示せ。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Longrightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

$P \Longrightarrow Q$ および $\neg P \wedge Q$ の真理表は次のようになっている。

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \Longrightarrow Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

対応する欄がまったく同じなので 2 つは同値であることがわかる。

2 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは「任意の $y \in Y$ に対し元 $x \in X$ が存在して $y = f(x)$ となる」ことである。また写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるとは,「任意の $x, x' \in X$ に対し $x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$ が成立する」ことである。このとき次の問いに答えよ。
(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射でない」という命題を「任意」と「存在」を用いて表せ。
(2) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を「任意」と「存在」を用いて表せ。
(3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定義する。このとき f が単射でないことを示せ。
(4) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定義する。このとき f が全射でないことを示せ。

(1)　ある元 $x, x' \in X$ が存在して，$x \neq x'$ かつ $f(x) = f(x')$ となる。
(2)　ある元 $y \in Y$ が存在して，任意の $x \in X$ に対し $y \neq f(x)$ が成立する。
(3)　単射であることの否定は (1) である。x, x' として $x = 1, x' = -1$ をとると，$1 \neq -1$ かつ $f(1) = f(-1)$ が成立している。単射の否定である (1) が成立しているので f は単射ではない。
(4)　全射であることの否定は (2) である。y として $y = -1$ をとる。任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) \geqq 0$ なので $f(x) \neq -1$ が成立している。全射の否定である (2) が成立しているので f は全射ではない。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{3}$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ が成立することを示せ。

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を示すためには (1) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ および，(2) $A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を示せばよい。

(1) x を $A \cap (B \cup C)$ の任意の元とする。このとき $x \in A$ かつ $x \in B \cup C$ が成立している。$x \in B$ の場合 $x \in A \cap B$ なので $A \cap B \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ より $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ となる。$x \in C$ の場合 $x \in A \cap C$ なので $A \cap C \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ より $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ となる。いずれの場合も $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ となるので (1) が示された。

(2) x を $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ の任意の元とする。$x \in A \cap B$ の場合，$A \cap B \subseteq A$ かつ $A \cap B \subseteq B \subseteq B \cup C$ より $x \in A$ かつ $x \in B \cup C$ となる。よって $x \in A \cap (B \cup C)$ が成立する。$x \in A \cap C$ の場合，$A \cap C \subseteq A$ かつ $A \cap C \subseteq C \subseteq B \cup C$ より $x \in A$ かつ $x \in B \cup C$ となる。よって $x \in A \cap (B \cup C)$ が成立する。いずれの場合も $x \in A \cap (B \cup C)$ となるので (2) が示された。

$\boxed{4}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$ と X の部分集合 A, B について次の問いに答えよ。

(1) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ が成立することを示せ。

(2) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ とはならない例をあげ，そのことを示せ。

(1) $f(A) = \{\, f(x) \mid x \in A \,\}$ なので y を $f(A \cap B)$ の任意の元とすると，$A \cap B$ の元 x が存在して $y = f(x)$ となる。$x \in A$ なので $y = f(x) \in f(A)$ となる。また $x \in B$ なので $y = f(x) \in f(B)$ となる。よって $y = f(x) \in A \cap B$ が成立する。以上により $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ が成立する。

(2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定義する。$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$，$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ とおくと $A \cap B = \emptyset$ である。よって $f(A \cap B) = \emptyset$ である。一方 $f(A) = \{\, f(x) \mid x \in A \,\} = \{\, y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \,\}$ であり，$f(B) = \{\, f(x) \mid x \in B \,\} = \{\, y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \,\}$ なので $f(A) = f(B)$ であり，よって $f(A) \cap f(B) = \{\, y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \,\}$ となり，$f(A \cap B) = \emptyset \neq \{\, y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \,\} = f(A) \cap f(B)$ となる。

$\boxed{5}$ 次に問いに答えよ。

(1) 点 $(3, -5)$ を通り直線 $y = x + 1$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

(2) 直線 $y = x + 1$ に関して点 $(4, 1)$ と対称な点を求めよ。

(1) 求める直線は $y = x + 1$ と直交するので，傾きは -1 である。よって直線の方程式を $y = -x + b$ とおく。この直線は $(3, -5)$ を通るので $-5 = -3 + b$ が成立している。よって $b = -2$ である。求める直線の方程式は $y = -x - 2$ である。

(2) 求める点を (a, b) とする。(a, b) と $(4, 1)$ を通る直線は $y = x + 1$ と直交するので傾きは -1 である。よって $\dfrac{b-1}{a-4} = -1$ が成立している。(a, b) と $(4, 1)$ の中点は $y = x + 1$ 上にあるので $\dfrac{b+1}{2} = \dfrac{a+4}{2} + 1$ が成立している。これを解いて $a = 0, b = 5$ となるので，求める点は $(0, 5)$ である。

6 円 $(x-1)^2+y^2=1$ と直線 $y=2x+n$ の共有点の個数を調べよ。

$y=2x+n$ を $(x-1)^2+y^2=1$ に代入すると $(x-1)^2+(2x+n)^2=1$ を得る。これを計算すると

$$5x^2+2(2n-1)x+n^2=0$$

となる。この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2n-1)^2-5n^2=-n^2-4n+1$$

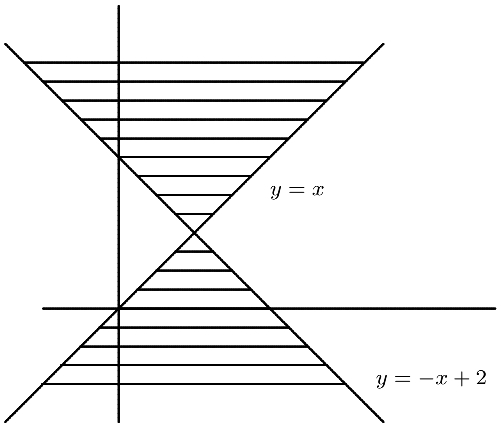
となる。$\frac{D}{4}=0$ を解くと $n=-2\pm\sqrt{5}$ となるので,

$-2-\sqrt{5}<n<-2+\sqrt{5}$ のとき 2 個
$n=-2\pm\sqrt{5}$ のとき 1 個
$n>-2+\sqrt{5}$ または $n<-2-\sqrt{5}$ のとき 0 個

2 次方程式の 2 次の係数はマイナスであるために判別式の正負を逆にしたものが若干いた。図形を考えるとそのようなものは間違いであることに気がついたであろう。

7 不等式 $(x-y)(x+y-2)<0$ の表す xy 平面上の領域を図示せよ。

$(x-y)(x+y-2)<0$ である必要十分条件は $(x-y<0$ かつ $x+y-2>0)$ または $(x-y>0$ かつ $x+y-2<0)$ である。境界は $y=x$ および $y=-x+2$ である。点 $(1,2)$ は $1-2<0$ かつ $1+2-2>0$ を満たし，点 $(1,0)$ は $1-0>0$ かつ $1+0-2<0$ を満たすので領域に属する。このことを考慮して図を描くと次図のようになっている。ただし境界を含まない。



裏にも問題有り

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{8}}$ 複素数 α_1, α_2 に対し次が成立することを示せ。ただし $\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を意味する。

$$\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = \overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_2}$$

$\alpha_1 = x_1 + iy_1$，$\alpha_2 = x_2 + iy_2$ とおく。ただし，$x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ である。

$$\overline{\alpha_1} = x_1 - iy_1, \quad \overline{\alpha_2} = x_2 - iy_2$$

が成立してる。また

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

なので

$$\overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

である。

$$\overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_2} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1) = \overline{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$$

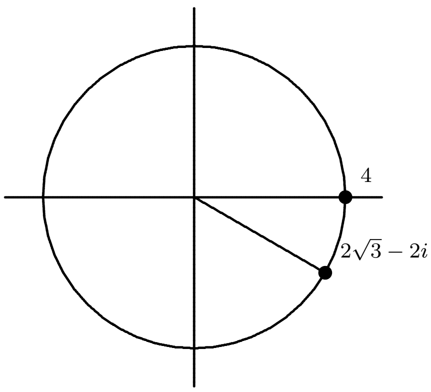
となり成立が示された。

$\boxed{\mathbf{9}}$ 複素数 $2\sqrt{3} - 2i$ の偏角を求め，極形式で表せ。また複素平面に図示せよ。

$\left|2\sqrt{3} - 2i\right| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = 4$ なので

$$2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\exp\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

と表すことができる。偏角は $-\frac{\pi}{6}$ である。$\frac{11\pi}{6}$ も勿論正解である。



$\boxed{\mathbf{10}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。