

注意: 答えは日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に、数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては白紙答案より低い点数になる場合がある。careless miss でそのような事はないが、「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について: 再履修者は10桁の在籍番号を書く事。1年生は出席番号(多くは2桁)でよい。

- 1 P, Q を命題とする。 $\neg P, P \wedge Q, P \vee Q, P \implies Q$ の真理表は次のようになっている。 $\neg(P \wedge Q)$ と $(\neg P) \vee (\neg Q)$ が同値であることを真理表を用いて示せ。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

$\neg(P \wedge Q)$ および $(\neg P) \vee (\neg Q)$ の真理表は次である。

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$(\neg P) \vee (\neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

$\neg(P \wedge Q)$ と $(\neg P) \vee (\neg Q)$ の表は全く同じなので同値であることが分かる。

- 2 写像 $f: X \rightarrow Y$ が全射であるとは「任意の $y \in Y$ に対し元 $x \in X$ が存在して $y = f(x)$ となる」ことである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f: X \rightarrow Y$ が全射でない」という命題を「任意」と「存在」を用いて表せ。

(2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定義する。このとき f が全射でないことを示せ。

(1) ある元 $y \in Y$ が存在して、任意の $x \in X$ に対し $y \neq f(x)$ が成立する。

(2) $y = -1$ とする。任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) = x^2 \geq 0$ なので $y \neq f(x)$ である。よって f は全射ではない。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学		在		氏	
籍		番		名	
号		籍			
		号			

3 $\sin x$ および $\cos x$ の加法定理は次である。

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

これを用いて和積公式

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

を証明せよ。

α, β に対し $x = \frac{\alpha + \beta}{2}, y = \frac{\alpha - \beta}{2}$ とおくと

$$x + y = \alpha, \quad x - y = \beta$$

が成立している。加法定理より

$$\sin \alpha = \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin \beta = \sin(x-y) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

が成立する。よって

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ &= 2 \sin x \cos y \\ &= 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

となり和積公式が示される。

4 次は対数法則

$$\log_a pq = \log_a p + \log_a q$$

の証明の最初の部分である。この後を書くことにより証明を完成させよ。

対数関数 $y = \log_a x$ は指数関数の逆関数なので $X = \log_a p, Y = \log_a q$ とおくと、 $p = a^X, q = a^Y$ が成立している。指数法則より

$$pq = a^X a^Y = a^{X+Y}$$

が成立している。

(ここから) 逆関数の関係を用いて $pq = a^{X+Y}$ を対数関数の関係に直すと

$$X + Y = \log_a pq$$

となる。よって

$$\log_a pq = X + Y = \log_a p + \log_a q$$

となる。

5 $y = x^3$ を微積分の諸公式を用いず定義に基づいて微分せよ。

$$\begin{aligned}(x^3)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\ &= 3x^2\end{aligned}$$

6 $y = x^2 \cos(x^2 + 1)$ を微分せよ。微積分の諸公式を用いてよい。

積の微分法より

$$(x^2 \cos(x^2 + 1))' = (x^2)' \cos(x^2 + 1) + x^2 (\cos(x^2 + 1))'$$

となる。また $u = x^2 + 1$ とおくと

$$(\cos(x^2 + 1))' = \frac{d}{dx} \cos(x^2 + 1) = \frac{du}{dx} \frac{d}{du} \cos u = 2x (-\sin u) = -2x \sin(x^2 + 1)$$

となる。以上により

$$(x^2 \cos(x^2 + 1))' = 2x \cos(x^2 + 1) - 2x^3 \sin(x^2 + 1)$$

となる。

7 $y = f(x) = x^2 + x + 1$ のグラフの $(1, 3)$ における接線の方程式を求めよ。

$f'(x) = 2x + 1$ より $f'(1) = 3$ となる。接線の方程式は

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 3(x - 1) + 3 = 3x$$

となる。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学		在番		氏	
科		籍号		名	

8 次の関数のグラフの概形を描け。

$$f(x) = x^2 \log x$$

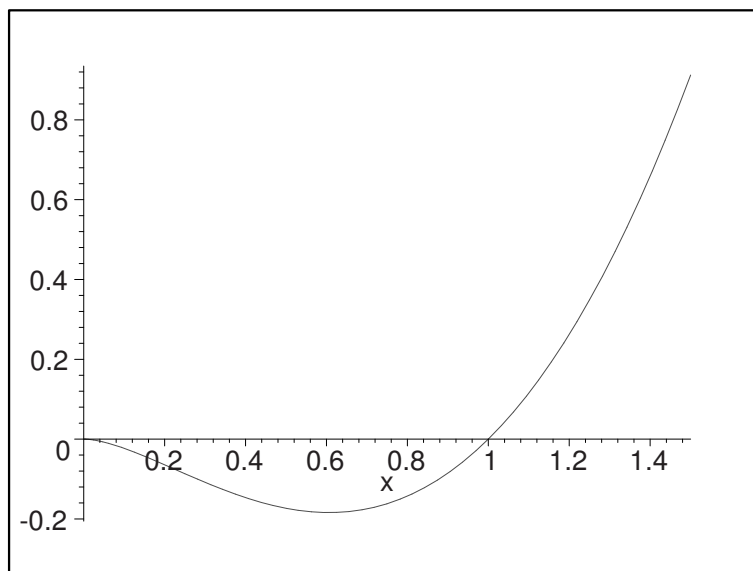
$\log x$ が定義されるのは $x > 0$ なので $f(x)$ の定義域も $x > 0$ である。 $f'(x) = 2x \log x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \log x + 1) = 0$ を解いて、 $x = \sqrt{\frac{1}{e}}$ を得る。よって増減表は次のようになる。

x		$\sqrt{\frac{1}{e}}$	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	$-\frac{2}{e}$	\nearrow

$x \rightarrow +0$ としたときの関数の挙動を調べる。ここでロピタルの定理（不定形の極限に対し $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が成立する）を用いる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \log x &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{-\frac{2}{x^3}} \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ であり、また $f(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のときのみである。このことに注意してグラフを描くと次図のようになる。



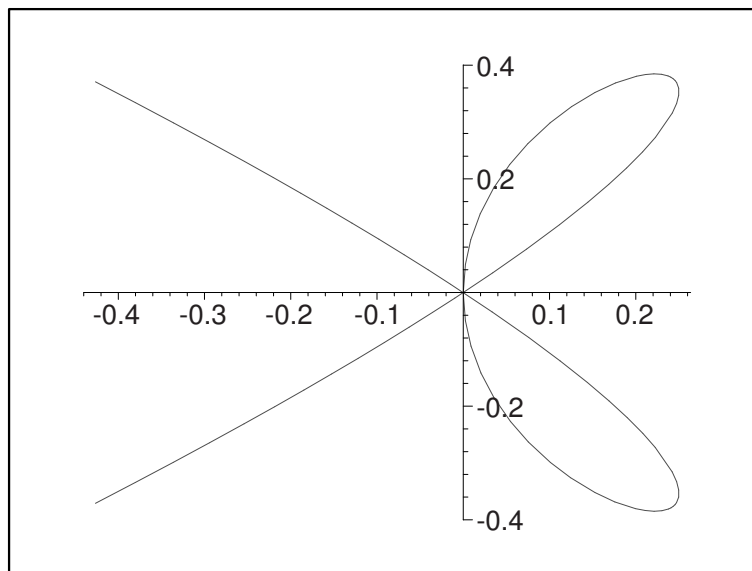
9 次のようにパラメータ表示された曲線の概形を描け。

$$x = x(t) = t^2 - t^4, \quad y = y(t) = t - t^3$$

$x'(t) = 2t - 4t^3 = 2t(1 - 2t^2) = 0$ より $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。 $y'(t) = 1 - 3t^2 = 0$ より $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ となる。増減表を書くと

t		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$x'(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$x(x)$	→	$\frac{1}{4}$	←	$\frac{2}{9}$	←	0	→	$\frac{2}{9}$	→	$\frac{1}{4}$	←
$y'(t)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$y(t)$	↓	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	↓	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↑	0	↑	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↓	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	↓
曲線	↘	↓	↙	←	↘	↑	↗	→	↘	↓	↙

となる。 x 軸との交わりは $y(t) = 0$ を解いて $t = -1, 0, 1$, y 軸との交わりは $x(t) = 0$ を解いて $t = -1, 0, 1$ であり, この点はいずれも原点である。これを元に曲線を描くと次図のようになる。



学科		在番 籍号		氏名	
----	--	----------	--	----	--