数学序論第 2 回試験

2007–6–4　　河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

証明なしで定理・命題を使用するときはその正確な内容を明示する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 P, Q を命題とする。$\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \Longrightarrow Q$ の真理表は次のようになっている。$\neg(P \wedge Q)$ と $\neg P \vee \neg Q$ が同値であることを真理表を用いて示せ。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Longrightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

真理表は次のようになる。

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

$\neg(P \wedge Q)$ と $\neg P \vee \neg Q$ の対応する欄が全く同じなので 2 つの命題は同値である。

2 次において P は Q の「必要十分条件，必要条件ではあるが十分条件ではない，十分条件ではあるが必要条件ではない，必要条件でも十分条件でもない」のいずれかであるか理由をつけて述べよ。ここで x, y は実数とする。

$$P : xy > 0, \quad Q : x > 0 \text{ かつ } y > 0$$

共に正である数の積は正になるので $Q \Longrightarrow P$ は正しい。よって P は Q であるための必要条件である。
$x = -1, y = -1$ のとき $xy = 1 > 0$ となるので $P \Longrightarrow Q$ は正しくない。よって P は Q の十分条件ではない。
以上により P は Q であるための必要条件ではあるが，十分条件ではない。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ a, b は与えられた実数とする。

(1) 命題 P を 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $a < x \Longrightarrow b < x$ とする。P の否定命題をつくれ。

ある $x \in \mathbb{R}$ が存在して $a < x$ かつ $x \leqq b$ が成立する。

(2) a と b がどのような関係にあるとき P が真になるか考察せよ。

(1) より P の否定命題が成立しているとき $a < b$ が成立する。逆に $a < b$ のときに $x = \dfrac{a+b}{2}$ とおくと，P の否定命題が成立することが分かる。よって P の否定命題と「$a < b$」は同値である。よって P は「$a < b$」の否定,「$b \leqq a$」と同値になる。
以上により「$b \leqq a$」のとき P は真であり，それ以外のときは偽であることが分かる。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 4 で割ると余りが 3 である自然数全体の集合を A とする。$\mathbb{N}_0 = \{\, m \in \mathbb{Z} \mid m \geqq 0 \,\}$ とし，$B = \{\, n \in \mathbb{N} \mid$ ある $k \in \mathbb{N}_0$が存在して $n = 4k+3 \,\}$ とするとき次が成立することを示せ。

(1) $A \subseteq B$

$n \in \mathbb{N}$ を A の任意の元とすると，ある整数 k が存在して $n = 4k+3$ と書ける。このとき $k < 0$ と仮定すると，$k \leqq -1$ となるので

$$n = 4k + 3 \leqq 4(-1) + 3 = -1 < 0$$

となり n が自然数であることに矛盾する。よって $k \geqq 0$ なので $k \in \mathbb{N}_0$ となる。よって $n \in B$ なので $A \subseteq B$ が成立する。

(2) $B \subseteq A$

$n \in B$ を B の任意の元とする。このときある $k \in \mathbb{N}_0$ が存在して，$n = 4k+3$ と書けるので，n は 4 で割ると 3 余る自然数である。よって $n \in A$ となるので $B \subseteq A$ が成立する。

(3) $A = B$

「$A \subseteq B$ かつ $A \supseteq B$」が $A = B$ の定義であった。(1)，(2) より $A \subseteq B$ かつ $A \supseteq B$ が成立している。よって $A = B$ が成立する。

裏にも問題あり。

学科		在籍番号		氏名	

5 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるとは,「任意の $x, x' \in X$ に対し $x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$ が成立する」ことである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射でない」という命題を「任意」と「存在」を用いて表せ。

ある $x, x' \in X$ が存在して $x \neq x'$ かつ $f(x) = f(x')$ が成立する。

(2) $f : \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ を $f(1) = 3, f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 3$ で定義する。このとき f が単射であるかどうか理由をつけて述べよ。

$1, 4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ であり，$1 \neq 4$ かつ $f(1) = 3 = f(4)$ が成立する。単射の否定が成立するので，f は単射ではない。

(3) $f : X \longrightarrow Y$ および $g : Y \longrightarrow Z$ が共に単射であるとき，$g \circ f$ が単射かどうか調べ，そのことを証明せよ。

単射になる。証明は以下に述べる。単射の対偶をとることにより「任意の $x, x' \in X$ に対し $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ ならば $x = x'$」を示せばよい。
任意の $x, x' \in X$ に対し $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ が成立しているとする。$g \circ f(x) = g(f(x))$ なので $g(f(x)) = g(f(x'))$ が成立している。g は単射なので $f(x) = f(x')$ が成立する。この事実と f が単射であることから $x = x'$ の成立が分かる。よって $g \circ f$ は単射である。

6 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。