数学序論第 3 回試験	2007–8–8	河野

注意:　答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

　採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

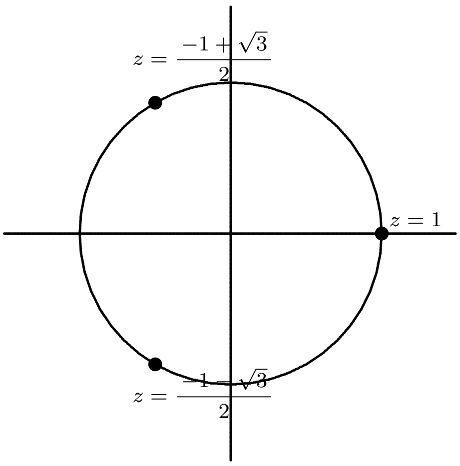
　在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 $z^3 = 1$ の解をすべて複素平面に図示せよ。またこの解の絶対値と偏角を求め極形式で表示せよ。ただし，複素平面に描いてある円は半径 1 の円である。

$z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1) = 0$ の解なので，$z = 1$ または $z = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ である。極形式で現すと

$$1 = 1 \cdot e^{i0}, \quad \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad \frac{-1-\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

なので絶対値はすべて 1，偏角はそれぞれ，0, $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{3}$ である。図示すると下図の様になっている。



2 加法定理 ($\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$，$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$) から次の式を導け。

$$\sin\alpha + \sin\beta \quad = \quad 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha, \quad \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = \beta$$

なので

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
\sin\beta &= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
&= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

となるので両辺を加えると式が得られる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 対数関数は指数関数の逆関数として定義された。即ち $a > 0$ かつ $a \neq 1$ に対し

$$y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y$$

て定義された。指数法則から次の式を導け。ここで $p,\ q$ は正の実数とする。

$$\log_a pq = \log_a p + \log_a q$$

$\log_a p = b,\ \log_a q = c$ とおくと定義より $p = a^b,\ q = a^c$ となる。

$$pq = a^b a^c = a^{b+c}$$

なので $b + c = \log_a pq$ となり，

$$\log_a pq = b + c = \log_a p + \log_a q$$

が示される。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 逆三角関数は三角関数の逆関数として定義された。即ち

$$y = \arcsin x \Longleftrightarrow x = \sin y \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right) \qquad y = \arccos x \Longleftrightarrow x = \cos y \quad (0 \leqq y \leqq \pi)$$

て定義された。$-1 \leqq x \leqq 1$ の時，$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

$y = \arcsin x$ とおくと，$x = \sin y \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が成立する。また $y_1 = \arccos x$ とおくと，$x = \cos y_1\ (0 \leqq y_1 \leqq \pi)$ が成立する。

$$\sin y \quad = \quad x = \cos y_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y_1\right)$$

であり $-\dfrac{\pi}{2} \leqq y_1 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。$y = \sin x$ は $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲では一対一なので $y = \dfrac{\pi}{2} - y_1$ が成立する。よって

$$\arcsin x + \arccos x = y + y_1 = \frac{\pi}{2}$$

の成立が示された。

5 関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ の導関数を定義に基づいて求めよ。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{xh(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{xh(x+h)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

6 次の関数の導関数を求めよ。諸公式を用いてよい。

$$\arctan\left(x^3 e^{3x^2+x} + \cos\left(x^8 + x^4\right)\right)$$

$$\begin{aligned} \left(\arctan\left(x^3 e^{3x^2+x} + \cos\left(x^8 + x^4\right)\right)\right)' &= \frac{\left(x^3 e^{3x^2+x} + \cos\left(x^8 + x^4\right)\right)'}{\left(x^3 e^{3x^2+x} + \cos\left(x^8 + x^4\right)\right)^2 + 1} \\ &= \frac{3x^2 e^{3x^2+x} + x^3(6x+1)e^{3x^2+x} - \sin\left(x^8 + x^4\right)\left(8x^7 + 4x^3\right)}{\left(x^3 e^{3x^2+x} + \cos\left(x^8 + x^4\right)\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{7}$ パラメータ表示された曲線

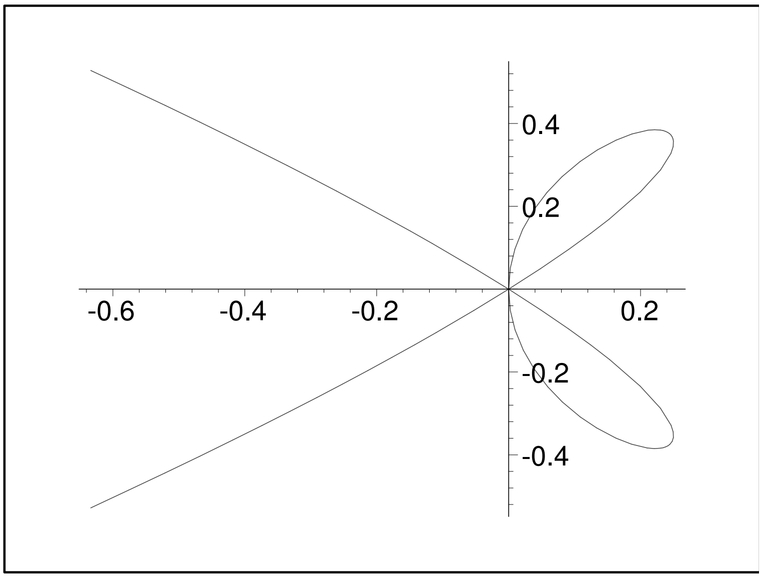
$$x = x(t) = t^2 - t^4, \quad y = y(t) = t - t^3$$

に対し増減表を書き，概形を描け。

$x'(t) = 2t - 4t^3 = 2t(1-2t^2) = 0$ より $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。$y'(t) = 1 - 3t^2 = 0$ より $t = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。増減表を書くと

t		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$x'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x(x)$	$\rightarrow$	$-\frac{1}{4}$	$\leftarrow$	$-\frac{2}{9}$	$\leftarrow$	0	$\rightarrow$	$-\frac{2}{9}$	$\rightarrow$	$\frac{1}{4}$	$\leftarrow$
$y'(t)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$y(t)$	$\downarrow$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\downarrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\uparrow$	0	$\uparrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\downarrow$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\downarrow$
曲線	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

となる。x 軸との交わりは $y(t) = 0$ を解いて $t = -1, 0, 1$，y 軸との交わりは $x(t) = 0$ を解いて $t = -1, 0, 1$ であり，この点はいずれも原点である。これを元に曲線を描くと次図のようになる。



$\boxed{\mathbf{8}}$ 不定積分

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$$

を求めよ。ただし，$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x$ を使用してよい。

$x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ なので $x+1=t$ と置いて置換積分を行うと，$\dfrac{dx}{dt}=1$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx &= \int \frac{1}{t^2+1}\frac{dx}{dt}dt = \int \frac{1}{t^2+1}dt \\ &= \arctan t = \arctan(x+1)\end{aligned}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{9}}$ 不定積分

$$\int x\cos x dx$$

を求めよ。

$f=x, g'=\cos x$ とおくと $g=\sin x$ なので

$$\begin{aligned}\int x\cos x dx &= \int fg' dx = fg - \int f' g dx \\ &= x\sin x - \int \sin x dx \\ &= x\sin x + \cos x\end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	