数学序論第１回試験

2008–5–23　　河野

注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 P, Q を命題とする。$\neg P$, $\mathbb{P} \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \implies Q$ の真理表は次のようになっている。$\neg(P \implies Q)$ と $P \wedge \neg Q$ が同値であることを真理表を用いて示せ。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

真理表を書くと下記のようになる。

P	Q	$P \implies Q$	$\neg(P \implies Q)$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F

$\neg(P \implies Q)$ と $P \wedge \neg Q$ の対応する欄の真理値が同じなので 2 つの命題は同値である。

2 a, b は与えられた実数とする。

(1) 命題 P を 「$\forall x \in \mathbb{R}\ \ a \leqq x \implies b < x$」とする。$P$ の否定命題をつくれ。

P の否定命題は

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \ a \leqq x \wedge x \leqq b$$

となる。

(2) a と b がどのような関係にあるとき P が真になるか考察せよ。

P の否定命題が正しいとき $a \leqq b$ が成立する。逆に「$a \leqq b$」が正しいとき，$x = \dfrac{a+b}{2}$ を選ぶと P の否定命題が成立することが分かる。よって P の否定命題と「$a \leqq b$」は同値である。

P と「$\neg(a \leqq b)$」は同値なので $a > b$ のとき P は真になる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\textbf{3}}$ 15 で割ると余りが 8 である自然数の集合を $A = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \;\; n = 15k + 8 \,\}$ とし，5 で割ると余りが 3 である自然数全体の集合を $B = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \;\; n = 5k + 3 \,\}$ とするとき，次の (1) 及び (2) を示せ。ただし $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ はそれぞれ自然数全体の集合及び整数全体の集合とする。

(1) $A \subseteq B$

$A \subseteq B$ を示すためには「$\forall n \;\; n \in A \implies n \in B$」を示せばよい。

n を A の任意の元とする。このとき $n \in \mathbb{N}$ であり，ある整数 k が存在して $n = 15k + 8$ となっている。

$$n = 15k + 8 = 5(3k + 1) + 3$$

と書き直すと，$k' = 3k + 1$ は整数なので $n = 5k' + 3$ の形になっている。よって $n \in B$ である。以上により $A \subseteq B$ が示された。

(2) $A \not\supseteq B$

$A \not\supseteq B$ を示すには「$\exists n \; n \notin A \land n \in B$」を示せばよい。

$3 = 5 \cdot 0 + 3$ は自然数であり，$0 \in \mathbb{Z}$ なので $3 \in B$ が成立する。$3 \in A$ が成立すると仮定すると，ある整数 k が存在して $3 = 15k + 8$ となる。このとき $k = -\dfrac{1}{3}$ が整数となるので矛盾。よって $3 \notin A$ である。以上により $A \not\supseteq B$ が示された。

4 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは,

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X\ \ y = f(x)$$

が成立することである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を「任意 $(\forall)$」と「存在 $(\exists)$」を用いて表せ。

$$\exists y \in Y\ \forall x \in X\ \ y \neq f(x)$$

(2) $X = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。写像 $f : X \longrightarrow X$ を $f(1) = 3, f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 3$ で定義する。このとき f が全射であるかどうか理由をつけて述べよ。

$4 \in X$ に対し $f(x) = 4$ となる $x \in X$ は存在しない。よって f は全射ではない。

(1) の全射の定義を，あやまって

$$\forall x \in X\ \exists x \in X\ \ x \neq f(x)$$

と解釈して解答した答案がいくつかあった。今の場合定義域と終域が等しいだけなので,

$$\forall y \in X\ \exists x \in X\ \ y \neq f(x)$$

となる。

(3) $f : X \longrightarrow Y$ および $g : Y \longrightarrow Z$ が共に全射であるとき，$g \circ f$ が全射かどうか調べ，そのことを証明せよ。

$g \circ f$ は全射である。そのことを示す。
任意の $z \in Z$ に対し，g は全射なので，$z = g(y)$ となる元 $y \in Y$ が存在する。また f は全射なので，y に対し $y = f(x)$ となる元 $x \in X$ が存在する。このとき $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$ となるので，$g \circ f$ は全射である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の連立方程式の解を求めよ。

$$(y-2x^2y)2^{-x^2-y^2}=0 \text{ かつ } (x-2xy^2)2^{-x^2-y^2}=0$$

指数関数は 0 になることがないので $2^{-x^2-y^2}\neq 0$ である。よって 2 つの式の両辺を $2^{-x^2-y^2}$ で割ると連立方程式は

$$y-2x^2y=0 \text{ かつ } x-2xy^2=0$$

となる。

$$\begin{aligned}
y(1-2x^2)=0 &\iff y=0\vee 1-2x^2=0\\
&\iff y=0\vee x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\
x(1-2y^2)=0 &\iff x=0\vee 1-2y^2=0\\
&\iff x=0\vee y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

なので，$y=0$ の場合を Y，$x=0$ の場合を X，$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の場合を X_1，$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の場合を Y_1，とおくと，場合は (1) Y かつ X，(2) Y かつ Y_1，(3) X_1 かつ X，(4)X_1 かつ Y_1，の 4 つの場合に分けられる。
(1) のとき解は $(x,y)=(0,0)$ である。(2) のとき $0=y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるので矛盾。このとき解はない。(3) のとき $0=x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるので矛盾。このとき解はない。(4) のとき解は $(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，または $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である。
以上により解は

$$(x,y)=(0,0),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

となる。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。