

注意: ・ 答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に、数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

・ 採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては白紙答案より低い点数になる場合がある。careless miss でそのような事はないが、「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

・ 内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。

・ 在籍番号欄について: 再履修者は10桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号(多くは2桁)でよい。

1 複素数 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対し 共役複素数 \overline{z} とは

$$\overline{z} = x - iy$$

で定義された。複素数 α, β に対し

$$\overline{(\alpha\beta)} = \overline{\alpha} \overline{\beta}$$

が成立することを示せ。

x_1, y_1, x_2, y_2 を実数として, α, β を $\alpha = x_1 + iy_1, \beta = x_2 + iy_2$ とおくと,

$$\overline{\alpha} = x_1 - iy_1, \quad \overline{\beta} = x_2 - iy_2$$

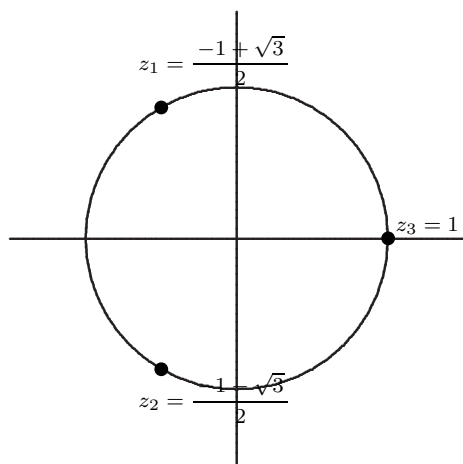
となるので,

$$\begin{aligned} \overline{(\alpha\beta)} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)} \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \overline{\alpha} \overline{\beta} \end{aligned}$$

となり成立する。

2 $z^3 = 1$ の解 (1 の 3 乗根) について次に答えよ。ただし, 複素平面に描いてある円は半径 1 の円である。

- (1) 解を極形式で表せ。
- (2) 解を具体的に求めよ。
- (3) 解を複素平面に図示せよ。



(1) 3 乗根は極形式で表すと, $z_1 = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right), z_2 = \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right), z_3 = \exp\left(\frac{6\pi i}{3}\right) (= \exp(0i)) = 1$ である。

(2) $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$ なので解は $z - 1 = 0$ または $z^2 + z + 1 = 0$ を満たす。 $z^2 + z + 1 = 0$ のときは 2 次方程式の解の公式より $z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ となる。よって解は $z = 1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ である。

(3) 左図 参照。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学 科		在 番 籍 号		氏 名	
--------	--	------------------	--	--------	--

3 三角関数の加法定理

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

および指数関数の指数法則

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

は知られているとする。このときこれから次の式を導け。

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

このとき関係式

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

を用いてもよいし、用いなくてもよい。

ここでは複素型の式を用いて解く。(勿論コサインの加法定理を用いる方法でもよい。)

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \cos \beta = \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} \\ &= \frac{1}{4} (e^{i\alpha} e^{i\beta} + e^{i\alpha} e^{-i\beta} + e^{-i\alpha} e^{i\beta} + e^{-i\alpha} e^{-i\beta}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}}{2} + \frac{e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{aligned}$$

となる。

4 a, b, c を正の実数とする。ただし $c \neq 1$ とする。 $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ が成立することを示せ。

$X = a^{\log_c b}$, $Y = b^{\log_c a}$ とおく。 $\log_c X = \log_c a^{\log_c b} = \log_c b \log_c a$ であり, $\log_c Y = \log_c b^{\log_c a} = \log_c a \log_c b$ なので $\log_c X = \log_c Y$ が成立する。対数関数は単射なので $X = Y$ が得られる。

5 双曲線関数は

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

で定義された。このとき

$$\sinh(a+b) = \sinh(a) \cosh(b) + \cosh(a) \sinh(b)$$

が成立することを示せ。

$$\begin{aligned} \sinh(a) \cosh(b) + \cosh(a) \sinh(b) &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a + e^{-a}}{2} \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{1}{4} (e^a e^b - e^{-a} e^b + e^a e^{-b} - e^{-a} e^{-b} + e^a e^b + e^{-a} e^b - e^a e^{-b} - e^{-a} e^{-b}) \\ &= \frac{1}{4} (2e^a e^b - 2e^{-a} e^{-b}) \\ &= \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2} \\ &= \sinh(a+b) \end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学 科		在番 籍号		氏 名	
--------	--	----------	--	--------	--

6 $x > 0$ の時, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ が成立することを示せ。

$Y_1 = \arctan x$ とおくと定義より $\tan Y_1 = x$ ($-\frac{\pi}{2} < Y_1 < \frac{\pi}{2}$) が成立している。ここで $x > 0$ なので $0 < Y_1 < \frac{\pi}{2}$ となっている。

$Y_2 = \arctan \frac{1}{x}$ とおくと定義より $\tan Y_2 = \frac{1}{x}$ ($-\frac{\pi}{2} < Y_2 < \frac{\pi}{2}$) が成立している。また $\frac{1}{x} > 0$ なので $0 < Y_2 < \frac{\pi}{2}$ となっている。

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - Y\right) = \cos Y$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - Y\right) = \sin Y$ より

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - Y\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - Y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - Y\right)} = \frac{\cos Y}{\sin Y} = \frac{1}{\frac{\sin Y}{\cos Y}} = \frac{1}{\tan Y}$$

が成立している。これより

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - Y_2\right) = \frac{1}{\tan Y_2} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = \tan Y_1$$

となる。 $0 < Y_2 < \frac{\pi}{2}$ は $0 < \frac{\pi}{2} - Y_2 < \frac{\pi}{2}$ と変形できる。 $y = \tan x$ は区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ で単射なので $\frac{\pi}{2} - Y_2 = Y_1$ が得られる。よって

$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ が示された。