数学序論第 3 回試験

2008–8–5　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 関数 $y = f(x) = x^3$ の導関数を定義に基づいて求めよ。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) \\
&= 3x^2
\end{aligned}
$$

2 次の関数の導関数を求めよ。ただし $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$，$(a^x)' = a^x \cdot \log a$ 等の諸公式を用いてよい。

$$y = f(x) = a^x \cdot \arctan\left(5x^2+1\right)$$

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(a^x\right)' \arctan\left(5x^2+1\right) + a^x \left(\arctan\left(5x^2+1\right)\right)' \\
&= a^x \log a \arctan\left(5x^2+1\right) + a^x \frac{10x}{1+\left(5x^2+1\right)^2}
\end{aligned}
$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

3 次の関数の増減および凹凸を調べ概形を書け。

$$y = f(x) = e^{-x^2}$$

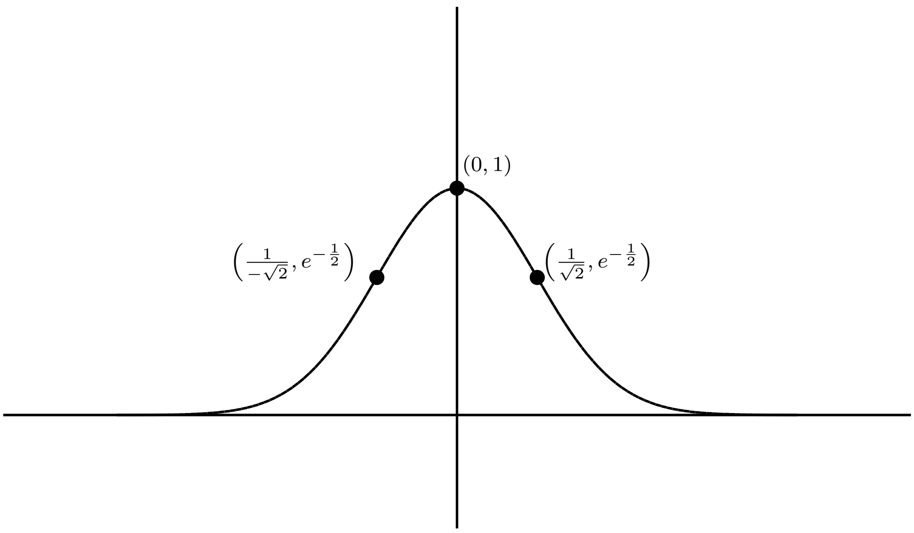
$y' = -2xe^{-x^2}$ なので $y' = 0$ を解いて $x = 0$ を得る。$x > 0$ のとき $f'(x) > 0$ より，関数はこの区間で単調増加である。$x > 0$ のとき $f'(x) < 0$ より，関数はこの区間で単調減少である。
$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ なので $y'' = 0$ を解いて $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $f''(x) < 0$ より，関数はこの区間で上に凸である。$x < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ または $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < x$ のとき $f''(x) > 0$ より，関数はこの区間で下に凸である。
よって増減表は次の様になる。

x		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

グラフは x 軸とは交わらない。y 軸との交点は $y = 1$ である。また

$$\lim_{x\to\infty} y = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} y = 0$$

なのでグラフの概形は次のようになる。



4 極限 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a^x - b^x}{x}$ を求めよ。ただし，$a > 0, b > 0$ とする。

$\displaystyle\lim_{x\to0}\left(a^x - b^x\right) = 1 - 1 = 0$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to0} x = 0$ なのでロピタルの定理を適用できる。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{a^x - b^x}{x} &= \lim_{x\to0}\frac{\left(a^x - b^x\right)'}{x'} = \lim_{x\to0}\frac{a^x\log a - b^x\log b}{1} \\ &= \log a - \log b\end{aligned}$$

5 パラメータ表示された曲線

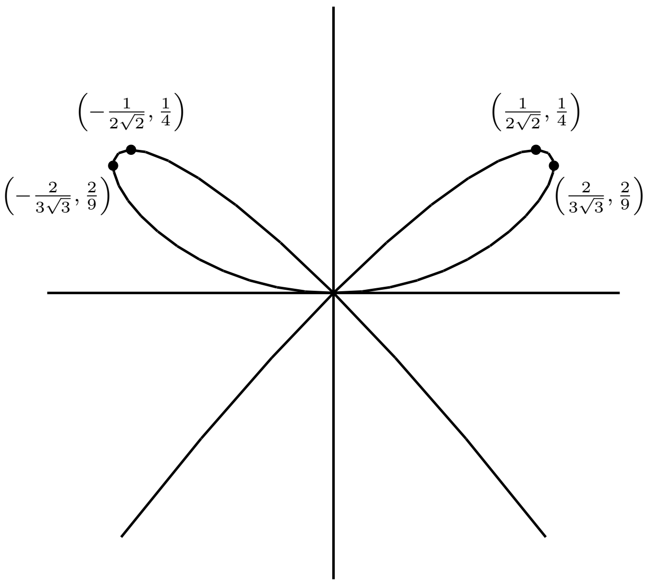
$$x = x(t) = t - t^3, \quad y = y(t) = t^2 - t^4$$

に対し増減表を書き，概形を描け。

$x'(t) = 1 - 3t^2 = 0$ より $t = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。$y'(t) = 2t - 4t^3 = 2t(1-2t^2) = 0$ より $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。増減表を書くと

t		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$x'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x(x)$	$\leftarrow$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\leftarrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\rightarrow$	0	$\rightarrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\leftarrow$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\leftarrow$
$y'(t)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$y(t)$	$\uparrow$	$\frac{1}{4}$	$\downarrow$	$\frac{2}{9}$	$\downarrow$	0	$\uparrow$	$\frac{2}{9}$	$\uparrow$	$\frac{1}{4}$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$

となる。x 軸との交わりは $y(t) = 0$ を解いて $t = -1, 0, 1$，y 軸との交わりは $x(t) = 0$ を解いて $t = -1, 0, 1$ であり，この点はいずれも原点である。これを元に曲線を描くと次図のようになる。



裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{6}}$ 不定積分

$$\int x\left(3x^2+1\right)^9\,dx$$

を求めよ。

$u=3x^2+1$ とおくと $\dfrac{du}{dx}=6x$ なので

$$\begin{aligned}\int x\left(3x^2+1\right)^9\,dx &= \int xu^9\frac{1}{6x}\,du\\ &= \frac{1}{6}\int u^9\,du=\frac{1}{6}\frac{1}{10}u^{10}\\ &= \frac{1}{60}\left(3x^2+1\right)^{10}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ 不定積分

$$\int x\cos x\,dx$$

を求めよ。

$(\sin x)'=\cos x$ なので

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= \int x\left(\sin x\right)'\,dx\\ &= x\sin x-\int (x)'\sin x\,dx\\ &= x\sin x+\cos x\end{aligned}$$