数学序論第 1 回試験

2009–6–11　　河野

注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 P, Q を命題とする。$\neg P$, $\mathbb{P} \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \implies Q$ の真理表は次のようになっている。$\neg(P \implies Q)$ は $P \wedge \neg Q$, $\neg P \wedge Q$, $P \vee \neg Q$, $\neg P \vee Q$ のいずれと同値であるかを真理表を用いて求めよ。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

$\neg(P \implies Q)$ および $P \wedge \neg Q$, $\neg P \wedge Q$, $P \vee \neg Q$, $\neg P \vee Q$ に関する真理表は下記のようになっている。

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \implies Q$	$\neg(P \implies Q)$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$
T	T	F	F	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	F	F	T	T

$\neg(P \implies Q)$ と $P \wedge \neg Q$ は対応する欄が同じであるので同値である。他の 3 つは同値ではない。

2 任意の自然数 n に対し $n(n^2+2)$ が 3 で割り切れることを数学的帰納法で証明せよ。

$n(n^2+2)$ が 3 で割り切れるという命題を $P(n)$ とおく。
(1) $n=1$ のとき $1(1^2+2)=3$ なので 3 は 3 で割り切れる。よって $P(1)$ は正しい。
(2) $P(k)$ 成立を仮定する。このとき $k(k^2+2)$ は 3 で割り切れるので，ある自然数 N が存在して $k(k^2+2)=3N$ と書くことができる。
$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}(k+1)\left((k+1)^2+2\right) &= k^3+3k^2+5k+3 = (k^3+2k)+3k^2+3k+3\\ &= k(k^2+2)+3(k^2+k+1) = 3N+3(k^2+k+1)\\ &= 3(N+k^2+k+1)\end{aligned}$$

となるので $P(k+1)$ も成立する。数学的帰納法により任意の自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 9 で割ると余りが 7 である自然数の集合を $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z}\ \ n = 9k+7\}$ とし，3 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z}\ \ n = 3k+1\}$ とするとき，次の (1) 及び (2) を示せ。ただし $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ はそれぞれ自然数全体の集合及び整数全体の集合とする。

(1) $A \subseteq B$

n を A の任意の元とするとある整数 k が存在して $n = 9k+7$ と書ける。このとき $n = 3(3k+2)+1$ となり，$3k+2 \in \mathbb{Z}$ なので $n \in B$ が成立する。以上により $A \subseteq B$ が示された。

(2) $A \not\supseteq B$

$A \supseteq B$ の定義は「$\forall n\ (n \in B \implies n \in A)$」なので $A \not\supseteq B$ は「$\exists n\ n \in B \wedge n \notin A$」となる。

$1 = 3 \cdot 0 + 1$ と書けて $0 \in \mathbb{Z}$ なので $1 \in B$ となる。$1 \in A$ と仮定すると「$\exists k \in \mathbb{Z}\ 1 = 9k+7$」が成立する。このとき $k = -\dfrac{2}{3}$ となるので $k \in \mathbb{Z}$ に矛盾する。よって $1 \notin A$ である。以上により $A \not\supseteq B$ が示された。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるとは,

$$\forall x_1, x_2 \in X \ f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

が成立することである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射でない」という命題を「任意 ($\forall$)」と「存在 ($\exists$)」を用いて表せ。

$$\exists x_1, x_2 \in X \ f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$$

(2) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする。写像 $f : X \longrightarrow X$ を $f(1) = 5, f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 3, f(5) = 5$ で定義する。このとき f が単射であるかどうか理由をつけて述べよ。

$f(1) = f(5) \wedge 1 \neq 5$ なので単射ではない。

(3) $f : X \longrightarrow Y$ および $g : Y \longrightarrow Z$ が共に単射であるとき，$g \circ f$ が単射かどうか調べ，成立するなら証明をし，成立しない場合は反例をあげよ。

x_1, x_2 を X の任意の元とする。「$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \implies x_1 = x_2$」を示せば単射であることが示される。
$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ が成立するとする。$g \circ f(x) = g(f(x))$ より $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ が成立している。g は単射なので $f(x_1) = f(x_2)$ が成立する。更に f も単射なので $x_1 = x_2$ が成立する。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の連立方程式の解を求めよ。

$$x(x^2+y^2)=0 \text{ かつ } y(x^2+y^2-1)=0$$

$$x(x^2+y^2)=0 \iff x=0 \vee x^2+y^2=0$$

が成立するが

$$x^2+y^2=0 \iff x=0 \wedge y=0$$

なので

$$x(x^2+y^2)=0 \iff x=0 \vee (x=0 \wedge y=0) \iff x=0$$

となる。よって 1 番目の式は $x=0$ と同値である。$x=0$ を 2 式に代入すると

$$y(y^2-1)=y(y-1)(y+1)=0$$

となるので $y=0,1,-1$ となる。よって求める解は $(x,y)=(0,0),(0,1),(0,-1)$ である。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。