数学序論第 2 回試験

2009–7–16　　河野

注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 複素数 α, β に対し

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$$

が成立することを示せ。

$\alpha = a + ib,\ \beta = c + id\ (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ とおくと

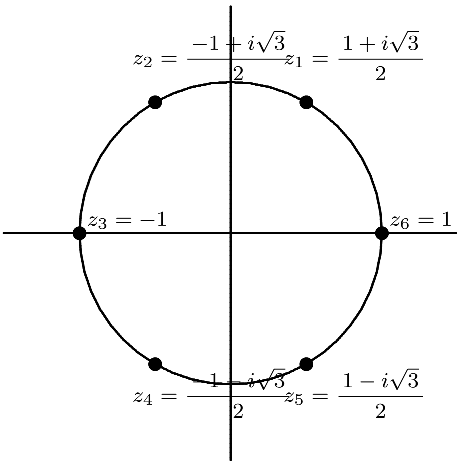
$$|\alpha|^2 = a^2 + b^2, \qquad |\beta|^2 = c^2 + d^2$$

また $\alpha\beta = (a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$ なので

$$\begin{aligned}|\alpha\beta|^2 &= (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ &= |\alpha|^2|\beta|^2\end{aligned}$$

となる。$|\alpha\beta| \geqq 0,\ |\alpha| \geqq 0,\ |\beta| \geqq 0$ なので $|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$ が成立する。

2 $z^6 = 1$ の解 (1 の 6 乗根) について次に答えよ。ただし，複素平面に描いてある円は半径 1 の円である。
(1) 解を極形式で表せ。
(2) 解を複素平面に図示せよ。
(3) 解を $x + iy$ の形で具体的に求めよ。



(1) 6 乗根は極形式で表すと，$z_1 = \exp\left(\frac{2\pi i}{6}\right) = \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right)$, $z_2 = \exp\left(\frac{4\pi i}{6}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$, $z_3 = \exp\left(\frac{6\pi i}{6}\right) = \exp(\pi i)$, $z_4 = \exp\left(\frac{8\pi i}{6}\right) = \exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right)$, $z_5 = \exp\left(\frac{10\pi i}{6}\right) = \exp\left(\frac{5\pi i}{3}\right)$, $z_6 = \exp\left(\frac{12\pi i}{6}\right) = \exp(2\pi i) = \exp(0i)$ である。
(2) **左図** 参照。
(3) $z^6 - 1 = (z^3-1)(z^3+1) = (z-1)(z^2+z+1)(z+1)(z^2-z+1) = 0$ なので解は $z-1=0$ または $z^2+z+1=0$ または $z+1=0$ または $z^2-z+1=0$ を満たす。$z^2+z+1=0$ のときは 2 次方程式の解の公式より $z = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ となる。$z^2-z+1=0$ のときは 2 次方程式の解の公式より $z = \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ となる。よって解は $z = 1, -1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 三角関数の加法定理

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \qquad \cos(x+y) = cosx \cos y - \sin x \sin y$$

および指数関数の指数法則

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

は知られているとする。このときこれらから次の式を導け。

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right) + \sin\left(\alpha-\beta\right)\right)$$

このとき関係式

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

を用いてもよいし，用いなくてもよい。

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}\frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} \\
&= \frac{1}{4i}\left(e^{i\alpha}e^{i\beta} + e^{i\alpha}e^{-i\beta} - e^{-i\alpha}e^{i\beta} - e^{-i\alpha}e^{-i\beta}\right) \\
&= \frac{1}{4i}\left(e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i} + \frac{e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)
\end{aligned}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f: I \to \mathbb{R}$ を区間 I で定義された単調減少関数とする。このとき f が単射であることを示せ。ただし f が単調減少であるとは「$\forall x_1, x_2 \in I\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$」が成立することである。

単射を示すためには「$\forall x_1, x_2 \in I\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$」を示せばよい。$x_1, x_2$ を I の元で $x_1 \neq x_2$ とすると $x_1 < x_2$ または $x_1 > x_2$ が成立する。$x_1 < x_2$ のとき単調減少より $f(x_1) > f(x_2)$ が成立するので $f(x_1) \neq f(x_2)$ となる。$x_1 > x_2$ のとき単調減少より $f(x_1) < f(x_2)$ が成立するので $f(x_1) \neq f(x_2)$ となる。よっていずれの場合も $f(x_1) \neq f(x_2)$ となり単射が示される。

$\boxed{\mathbf{5}}$ a を 1 でない正の実数，p, q を正の実数とする。指数法則を用いて

$$\log_a pq = \log_a p + \log_a q$$

が成立することを示せ。

$X = \log_a p,\ Y = \log_a q$ とおくと $p = a^X, q = a^Y$ が成立する。指数法則より

$$pq = a^X a^Y = a^{X+Y}$$

が成立する。この関係式を対数に直すと

$$X + Y = \log_a pq$$

となる。よって $\log_a pq = X + Y = \log_a p + \log_a q$ が成立する。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{6}}$ $-1 \leqq x \leqq 1$ の時，$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ が成立することを示せ。

$Y = \arcsin x, Z = \arccos x$ とおくと

$$x = \sin Y \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq Y \leqq \frac{\pi}{2}\right), \qquad x = \cos Z \quad (0 \leqq Z \leqq \pi)$$

が成立する。また

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - Z\right) = \cos Z = x = \sin Y$$

となる。$0 \leqq Z \leqq \pi$ より $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2} - Z \leqq \dfrac{\pi}{2}$ が成立し，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq Y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ が成立している。$\sin x$ は $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ で単調なので $\dfrac{\pi}{2} - Z = Y$ が得られる。よって

$$\arcsin x + \arccos x = Y + Z = \frac{\pi}{2}$$

が成立する。