数学序論第3回試験

2009–8–3　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ の導関数を定義に基づいて求めよ。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x+h)^2}{h(x+h)^2x^2}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2hx-h^2}{h(x+h)^2x^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{(x+h)^2x^2} = \frac{-2x}{x^4}\\
&= -\frac{2}{x^3}
\end{aligned}
$$

2 次の関数の導関数を求めよ。ただし $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(a^x)' = a^x\cdot\log a$ 等の諸公式を用いてよい。

$$y = f(x) = 2^x\cdot\arcsin\left(x^2+1\right)$$

$$f'(x) = 2^x\log 2\arcsin(x^2+1) + 2^x\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+1)^2}}2x$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ 上に相異なる 2 点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ をとったとする。この放物線の接線で，線分 PQ に平行となるのは，どの点における接線か？ その点の x 座標の値を求めよ。

$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c, y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$ なので直線 PQ の傾き m は

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 + bx_2 + c - ax_1^2 - bx_1 - c}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2) + b$$

となる。
$y' = 2ax + b$ なので $2ax + b = a(x_1 + x_2) + b$ を解いて $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ を得る。よって求める点の x 座標は $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$ である。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{2n + 3}$ を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{2n + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}\,\frac{1}{n}}{(2n + 3)\,\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{2 + \frac{3}{n}}$$
$$= \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$ を求めよ。

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{3x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$$

式の途中でロピタルの定理を使用した。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 関数 $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ に対し増減表を書き，グラフの凹凸を調べ，概形を描け。

$y' = -\dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$ なので $y' = 0$ を解いて $x = 1, -1$ を得る。$x < -1$ または $x > 1$ のとき $y' < 0$ なのでこの範囲で単調減少である。

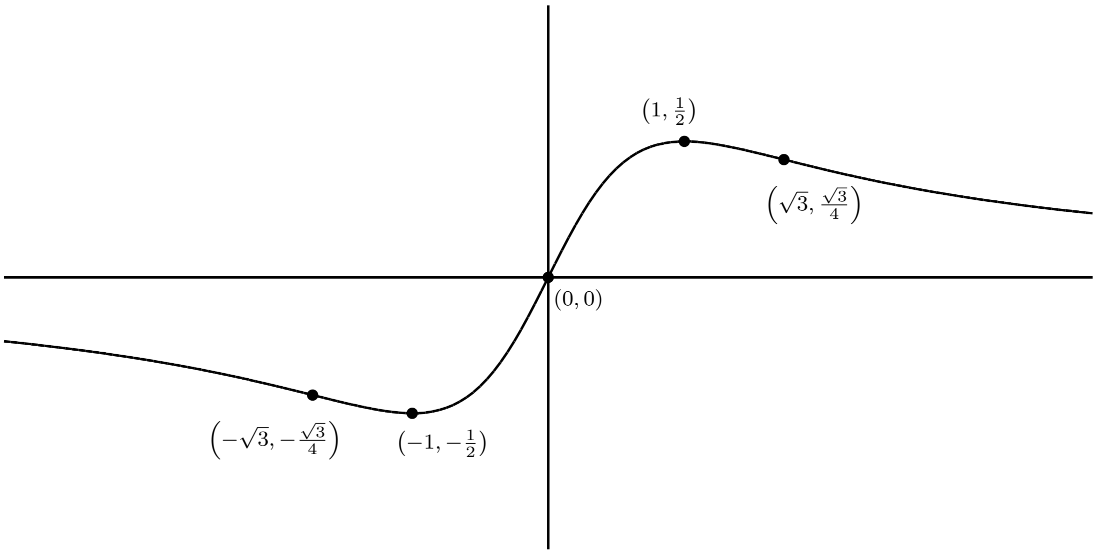
$y'' = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ なので $y'' = 0$ を解いて $x = -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ を得る。$x < -\sqrt{3}$ または $0 < x < \sqrt{3}$ のとき $y'' < 0$ より，関数はこの区間で上に凸である。$-\sqrt{3} < x < 0$ または $\sqrt{3} < x$ のとき $y'' > 0$ より，関数はこの区間で下に凸である。
よって増減表は次の様になる。

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$

グラフは x 軸との交点は $x = 0$，y 軸との交点は $y = 0$ である。また

$$\lim_{x\to\infty} y = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} y = 0$$

なのでグラフの概形は次のようになる。



裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{7}}$ 不定積分

$$\int x^2\left(x^3+2\right)^{12}\,dx$$

を求めよ。

$t=x^3+2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=3x^2$ なので $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{3x^2}$ となる。よって

$$\begin{aligned} I &= \int x^2t^{12}\frac{dx}{dt}\,dt=\int\frac{x^2t^{12}}{3x^2}\,dt=\frac{1}{3}\int t^{12}\,dt=\frac{1}{3}\frac{1}{13}t^{13} \\ &= \frac{1}{39}(x^3+2)^{13} \end{aligned}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{8}}$ 不定積分

$$\int \arctan x\,dx$$

を求めよ。ただし $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ であることを使用してもよい。

$$\begin{aligned} I &= \int (x')\arctan x\,dx = x\arctan x-\int x\big(\arctan x\big)'\,dx \\ &= x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx \end{aligned}$$

となる。ここで $t=1+x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2x$ となるので $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2x}$ である。

$$\int\frac{x}{1+x^2}\,dx=\int\frac{x}{1+x^2}\frac{1}{2x}\,dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{2}\log|t|=\frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

となるので

$$I=x\arctan x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

となる。