数学序論第１回試験

2010–6–7　　河野

注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 P, Q を命題とする。$\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \implies Q$ の真理表は下のようになっている。$P \wedge \neg Q$, $\neg P \wedge Q$, $P \vee \neg Q$, $\neg P \vee Q$ の中で $\neg(P \implies Q)$ と同値になるものがあるかどうかを真理表を用いて調べよ。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

$P \wedge \neg Q$, $\neg P \wedge Q$, $P \vee \neg Q$, $\neg P \vee Q$, $\neg(P \implies Q)$ の真理表を書くと下記のようになる。

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$	$\neg(P \implies Q)$
T	T	F	F	F	F	T	T	F
T	F	F	T	T	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	T	F	F	T	T	F

$\neg(P \implies Q)$ と $P \wedge \neg Q$ は対応する欄が同じであるので同値である。他の 3 つは同値ではない。

2 n を任意の自然数とし，h を $h \geqq 0$ となる任意の実数とする。$(1+h)^n \geqq 1 + nh$ を数学的帰納法で証明せよ。

命題「$(1+h)^n \geqq 1 + nh$」を $P(n)$ と置く。
(1) $n = 1$ のとき $(1+h)^1 = 1 + h = 1 + 1 \cdot h$ となるので $P(1)$ は成立している。
(2) $n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $P(k) : (1+h)^k \geqq 1 + kh$ の成立を仮定する。このとき

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1} &= (1+h)^k(1+h) \geqq (1+kh)(1+h) \\ &= 1 + kh + h + kh^2\end{aligned}$$

となり $(1+h)^{k+1} \geqq 1 + (k+1)h + kh^2$ が成立するが $kh^2 \geqq 0$ が成立しているので $1 + (k+1)h + kh^2 \geqq 1 + (k+1)h$ が成立する。よって $(1+h)^{k+1} \geqq 1 + (k+1)h$ が成立し，$P(k+1)$ が成立する。数学的帰納法により任意の自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 15 で割ると余りが 8 である自然数の集合を $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \;\; n = 15k + 8\}$ とし，5 で割ると余りが 3 である自然数全体の集合を $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \;\; n = 5k + 3\}$ とするとき $A \subseteq B$ が成立することを示せ。ただし $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ はそれぞれ自然数全体の集合及び整数全体の集合とする。

n を A の任意の元とすると n は自然数であり，ある整数 k が存在して $n = 15k + 8$ と書ける。このとき

$$n = 15k + 8 = 5 \cdot 3k + 5 + 3 = 5(3k + 1) + 3$$

と書き直すことができる。$3k + 1 \in \mathbb{Z}$ なので $n \in B$ が成立する。よって $A \subseteq B$ が成立する。

$\boxed{\mathbf{4}}$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ が成立することを示せ。

「$\forall x \quad x \in A \cap (B \cup C) \implies x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$」および「$\forall x \quad x \in A \cap (B \cup C) \impliedby x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$」を示せばよい。

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\iff x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

が成立するので上述の成立が分かる。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは,

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \ \ y = f(x)$$

が成立することである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を「任意 ($\forall$)」と「存在 ($\exists$)」を用いて表せ。

$$\exists y \in Y \ \forall x \in X \ y \neq f(x)$$

(2) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする。写像 $f : X \longrightarrow X$ を $f(1) = 5, f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 3, f(5) = 5$ で定義する。このとき f が全射であるかどうか理由をつけて述べよ。

終域 X の元 4 を考える。定義域 X の元 x で $f(x) = 4$ となる元は存在しない。即ち定義域 X の任意の元 x に対し $f(x) \neq 4$ が成立する。よって f は全射ではない。

(3) $f : X \longrightarrow Y$ および $g : Y \longrightarrow Z$ が共に全射であるとき，$g \circ f$ が全射であることを証明せよ。

z を Z の任意の元とする。g が全射なので $z = g(y)$ となる Y の元 y が存在する。また f は全射なので y に対し $y = f(x)$ となる X の元 x が存在する。このとき

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

となるので $g \circ f$ は全射である。

(4) (3) の例を 1 つあげよ。

$X = Y = Z = \{1\}$ とする。写像 f および g は元 1 に対し元 1 を対応させる写像とする。Z の任意の元を z とする。このとき $z = 1$ である。$x = 1$ とすると

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(1) = 1$$

となるので全射であることが分かる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の連立方程式の解を求めよ。

$$(y-2x^2y)2^{-x^2-y^2}=0 \text{ かつ } (x-2xy^2)2^{-x^2-y^2}=0$$

指数関数は常に正なので割り算を実行すると連立方程式は

$$y-2x^2y=0 \tag{1}$$

$$x-2xy^2=0 \tag{2}$$

となる。因数分解すると，(1) は $y(1-2x^2)=0$，(2) は $x(1-2y^2)=0$ となるので

$$y=0 \quad (1a) \text{ または } 1-2x^2=0 \quad (1b)$$

かつ

$$x=0 \quad (2a) \text{ または } 1-2y^2=0 \quad (2b)$$

が成立する。
$(1a)$ かつ $(2a)$ が成立するとき $(x,y)=(0,0)$ である。
$(1a)$ かつ $(2b)$ が成立するとき $y=0$ $(1a)$ を $1-2y^2=0$ $(2b)$ に代入すると $1=0$ となり矛盾。この場合は起こらない。
$(1b)$ かつ $(2a)$ が成立するとき $x=0$ $(2a)$ を $1-2x^2=0$ $(1b)$ に代入すると $1=0$ となり矛盾。この場合は起こらない。
$(1b)$ かつ $(2b)$ が成立するときは $1-2x^2=0$ $(1b)$ より $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を，$1-2y^2=0$ $(2b)$ より $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。
解として

$$(x,y)=(0,0),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

を得る。これらはすべて最初の連立方程式を満たしていることが分かるのでこれが求める解である。

$\boxed{\mathbf{7}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。