数学序論第 2 回試験

2010–7–12　　河野

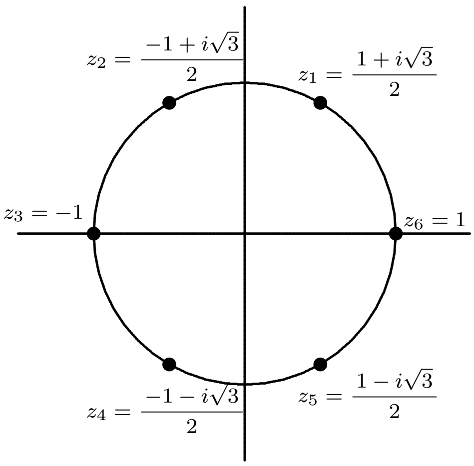
注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。再履修者以外は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 $\dfrac{(5+3i)(1+i)}{1+2i}$ を $x+iy$ (x, y は実数) の形に表せ。

$$\frac{(5+3i)(1+i)}{1+2i} = \frac{2+8i}{1+2i} = \frac{(2+8i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{18+4i}{5} = \frac{18}{5} + i\frac{4}{5}$$

2 $z^6 = 1$ の解 (1 の 6 乗根) について次に答えよ。ただし，複素平面に描いてある円は半径 1 の円である。
(1) 解を極形式で表せ。
(2) 解を複素平面に図示せよ。
(3) 解を $x+iy$ の形で具体的に求めよ。

(1)　6 乗根は極形式で表すと，$z_1 = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{6}\right) = \exp\left(\dfrac{\pi i}{3}\right)$, $z_2 = \exp\left(\dfrac{4\pi i}{6}\right) = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{3}\right)$, $z_3 = \exp\left(\dfrac{6\pi i}{6}\right) = \exp(\pi i)$, $z_4 = \exp\left(\dfrac{8\pi i}{6}\right) = \exp\left(\dfrac{4\pi i}{3}\right)$, $z_5 = \exp\left(\dfrac{10\pi i}{6}\right) = \exp\left(\dfrac{5\pi i}{3}\right)$, $z_6 = \exp\left(\dfrac{12\pi i}{6}\right) = \exp(2\pi i) = \exp(0i)$ である。



(2)　**左図** 参照。

(3)　$z^6-1 = (z^3-1)(z^3+1) = (z-1)(z^2+z+1)(z+1)(z^2-z+1) = 0$ なので解は $z-1=0$ または $z^2+z+1=0$ または $z+1=0$ または $z^2-z+1=0$ を満たす。$z^2+z+1=0$ のときは 2 次方程式の解の公式より $z = \dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ となる。$z^2-z+1=0$ のときは 2 次方程式の解の公式より $z = \dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ となる。よって解は $z = 1, -1, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 三角関数の加法定理

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \qquad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

は知られているとする。このときこれらから次の式を導け。

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \\
&= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} \\
&= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 双曲線関数は

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

で定義された。このとき

$$\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$$

が成立することを示せ。

$$\begin{aligned}
\sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b) &= \frac{e^a - e^{-a}}{2}\frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{e^a + e^{-a}}{2}\frac{e^b - e^{-b}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(e^a e^b - e^{-a}e^b + e^a e^{-b} - e^{-a}e^{-b} + e^a e^b + e^{-a}e^b - e^a e^{-b} - e^{-a}e^{-b}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2e^a e^b - 2e^{-a}e^{-b}\right) \\
&= \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2} \\
&= \sinh(a+b)
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ a を 1 でない正の実数，p, q を正の実数とする。指数法則を用いて

$$\log_a pq = \log_a p + \log_a q$$

が成立することを示せ。ただし $\log_a p^x = x \log_a p$ 等の諸公式を用いてはいけない。

$X = \log_a p, Y = \log_a q$ とおくと，$p = a^X, q = a^Y$ である。指数法則を用いると

$$pq = a^X a^Y = a^{X+Y}$$

となるので，この式を対数の形にすると

$$X + Y = \log_a pq$$

となる。よって

$$\log_a pq = X + Y = \log_a p + \log_a q$$

である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\arctan x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ が成立することを次の順で示せ。

(1) $X = \arctan x$ とおくとき $1 + x^2 = \dfrac{1}{\cos^2 X}$ が成立することを示せ。

arctan の定義より

$$X = \arctan x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \tan X \quad \left(-\frac{\pi}{2} < X < \frac{\pi}{2}\right)$$

が成立している。よって

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 X = 1 + \frac{\sin^2 X}{\cos^2 X} = \frac{\cos^2 X + \sin^2 X}{\cos^2 X} = \frac{1}{\cos^2 X}$$

となる。

(2) $Y = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくとき $\sin Y = \sin X$ が成立することを示せ。

arcsin の定義より

$$Y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin Y \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq Y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

が成立している。
$-\dfrac{\pi}{2} < X < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos X \geqq 0$ が成立している。よって $1 + x^2 = \dfrac{1}{\cos^2 X}$ [(1) の結果] より $\cos X = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ となる。

$$\sin Y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \tan X \cos X = \frac{\sin X}{\cos X} \cos X = \sin X$$

となる。

(3) $\arctan x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ が成立することを示せ。

$\sin x$ は定義域を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に限ると単射である。$-\dfrac{\pi}{2} < X < \dfrac{\pi}{2}$ および $-\dfrac{\pi}{2} \leqq Y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ が成立しており，(2) より $\sin X = \sin Y$ が成立しているので $X = Y$，即ち

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

が成立する。