数学序論第 3 回試験

2010–8–2　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 関数 $y = f(x) = x + \dfrac{1}{x^3}$ の導関数を定義に基づいて求めよ。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h+\dfrac{1}{(x+h)^3}-x-\dfrac{1}{x^3}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h+\frac{x^3-(x+h)^3}{(x+h)^3x^3}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h-\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{(x+h)^3x^3}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(1-\frac{3x^2+3xh+h^2}{(x+h)^3x^3}\right) = 1-\frac{3}{x^4}
\end{aligned}
$$

2 次の関数の導関数を求めよ。ただし $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$，$(a^x)' = a^x\cdot\log a$ 等の諸公式を用いてよい。

$$y = f(x) = 3^x\cdot\arctan\left(x^3+x\right)$$

$u = x^3 + x$ とおくと

$$\frac{d}{dx}\arctan(x^3+x) = \frac{du}{dx}\frac{d}{du}\arctan u = (3x^2+1)\frac{1}{1+u^2} = \frac{3x^2+1}{1+(x^3+x)^2}$$

なので

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (3^x)'\arctan(x^3+x) + 3^x\left(\arctan(x^3+x)\right)'\\
&= 3^x\log 3\arctan(x^3+x) + 3^x\frac{3x^2+1}{1+(x^3+x)^2}
\end{aligned}
$$

となる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\textbf{3}}$ 関数 $y = f(x) = xe^{-x^2}$ に対し増減表を書き，グラフの凹凸を調べ，概形を描け。

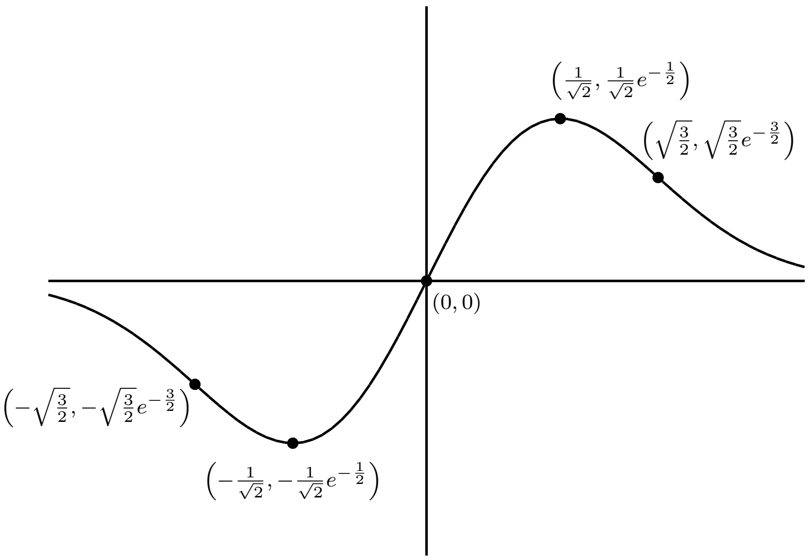
$f'(x) = (x)'\,e^{-x^2} + x\left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2}$ であり，$f''(x) = \left(1-2x^2\right)'\,e^{-x^2} + (1-2x^2)\left(e^{-x^2}\right)'$
$= -4xe^{-x^2} + (1-2x^2)(-2x)e^{-x^2} = 2x(2x^2-3)e^{-x^2}$ である。$f'(x) = 0$ を解くと $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$f''(x) = 0$ を解くと $x = 0, \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ となる。$f'(x), f''(x)$ の正負を調べると (実際に間の値を代入して正負を調べること)，増減表は次の様になる。

x		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\sqrt{\frac{3}{2}}$	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↘		↘		↗		↗		↘		↘

グラフは x 軸との交点は $x=0$，y 軸との交点は $y=0$ である。また

$$\lim_{x\to\infty} y = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} y = 0$$

なのでグラフの概形は次のようになる。



$\boxed{\textbf{4}}$ 曲線 $y = x^3 - x$ の原点における法線 (接点で接線と直交する直線) と曲線の交点を求めよ。

$f(x) = x^3 - x$ とおくと $f'(x) = 3x^2 - 1$ である。$f'(0) = -1$ なので原点における接線の傾きは -1 である。よって原点における法線の傾きは 1 なので法線の方程式は $y = x$ となる。$y = f(x)$ と $y = x$ の共通解が交点を与える。$x = x^3 - x$ より，$x^3 - 2x = x(x^2-2) = 0$ となるので $x = 0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$ となる。よって交点は

$$(x, y) = (0,0)\,, \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

である。

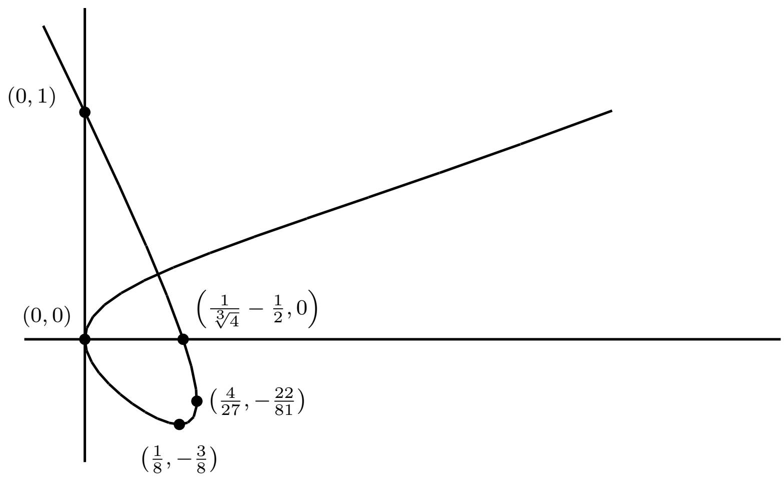
5 次のようにパラメーター表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = t^2 - t^3, \qquad y = y(t) = 2t^4 - t$$

$x'(t) = 2t - 3t^2, y'(t) = 8t^3 - 1$ なので $x'(t) = 0$ を解くと，$t(2-3t) = 0$ より $t = 0, \dfrac{2}{3}$ を得る。$y'(t) = 0$ を解くと，$8t^3 - 1 = (2t-1)(4t^2+2t+1) = 0$ より $t = \dfrac{1}{2}$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
曲線	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{8}, -\dfrac{3}{8}\right)$, $\left(\dfrac{4}{27}, -\dfrac{22}{81}\right)$, である。$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, 1$ を得る。y 軸との交点は $(0,0), (0,1)$ である。$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ を得る。x 軸との交点は $(0,0), \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} - \dfrac{1}{2}, 0\right)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



6 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{1-\dfrac{1}{n}}} = 1
\end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{7}}$ 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ を求めよ。

$Y=\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ とおくと $\log Y=\log\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x}\log\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)$ となるのでロピタルの定理より

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\log Y &= \lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)'}{(x)'}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{a^x\log a+b^x\log b}{\frac{a^x+b^x}{2}}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)\\
&=\frac{1}{2}\log ab=\log(ab)^{\frac{1}{2}}=\log\sqrt{ab}
\end{aligned}$$

となる。log は連続なので $\displaystyle\lim_{x\to 0}\log Y=\log(\lim_{x\to 0}Y)$ が成立する。よって $\displaystyle\log(\lim_{x\to 0}Y)=\log\sqrt{ab}$ を得るが，log は単射なので

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}Y=\sqrt{ab}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{8}}$ 不定積分

$$\int\frac{x}{x^2+1}\,dx$$

を求めよ。どのような方法 (置換積分，部分積分等) で解いたか分かるように計算過程もきちんと書くこと。

$u=x^2+1$ とおくと $\dfrac{du}{dx}=2x$ なので $dx=\dfrac{1}{2x}du$ となる。

$$\int\frac{x}{x^2+1}\,dx=\int\frac{x}{u}\frac{1}{2x}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,du=\frac{1}{2}\log|u|=\frac{1}{2}\log|x^2+1|=\frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ 不定積分

$$\int\arcsin x\,dx$$

を求めよ。どのような方法 (置換積分，部分積分等) で解いたか分かるように計算過程もきちんと書くこと。ただし $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であることを使用してもよい。

$$\begin{aligned}
\int\arcsin x\,dx &= \int(x)'\arcsin x\,dx=x\arcsin x-\int x\,(\arcsin x)'\,dx\\
&=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad u=1-x^2\ \text{とおくと}\\
&=x\arcsin x-\int\frac{1}{-2\sqrt{u}}\,du=x\arcsin x+\frac{1}{2}2u^{\frac{1}{2}}\\
&=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$