# 数学序論第１回試験

2011–6–6　　河野

**注意**：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

**1**　$P, Q$ を命題とする。$\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \implies Q$ の真理表は下のようになっている。$P \wedge \neg Q$, $\neg P \wedge Q$, $P \vee \neg Q$, $\neg P \vee Q$ の中で $\neg(P \implies Q)$ と同値になるものがあるかどうかを真理表を用いて調べよ。

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \implies Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F |
| F | T | F | T | T |
| F | F | F | F | T |

$P \wedge \neg Q$, $\neg P \wedge Q$, $P \vee \neg Q$, $\neg P \vee Q$, $\neg(P \implies Q)$ の真理表を書くと下記のようになる。

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $P \wedge \neg Q$ | $\neg P \wedge Q$ | $P \vee \neg Q$ | $\neg P \vee Q$ | $\neg(P \implies Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | F | F | T | T | F |
| T | F | F | T | T | F | T | F | T |
| F | T | T | F | F | T | F | T | F |
| F | F | T | T | F | F | T | T | F |

$\neg(P \implies Q)$ と $P \wedge \neg Q$ は対応する欄が同じであるので同値である。他の 3 つは同値ではない。

**2**　$a, b$ は与えられた実数とする。次の命題を $P$ とする。

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ a \leqq x \implies b < x$$

$a, b$ がどのような関係にあるとき $P$ が真になるかを調べよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体からなる集合である。

$P$ の否定命題 $\neg P$ は

$$\exists x \in \mathbb{R} \ \ a \leqq x \wedge x \leqq b$$

である。「$a \leqq b$」という命題を $Q$ とすると，$\neg P$ が成立するとき $Q$ も成立する。即ち $\neg P \implies Q$ が成立する。逆に $Q$ が成立しているとき，$x = \dfrac{a+b}{2}$ とおくと，$\neg P$ が成立する。よって $\neg P$ と $Q$ は同値である。このとき $P$ と $\neg Q$ は同値であることが分かる。以上により $\neg Q$ が真のとき，つまり $Q$ が偽のとき，即ち $b < a$ のとき $P$ は真であり，逆も成立することが分かる。

**裏にも問題あり。別紙にも問題あり**

| 学科 | | 在番籍号 | | 氏名 | |
|---|---|---|---|---|---|

$\boxed{\mathbf{3}}$ $A = \{\, 3k-2 \mid k \in \mathbb{N} \,\}$, $B = \{\, 7k-4 \mid k \in \mathbb{N} \,\}$, $C = \{\, 21k-11 \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ とするとき $A \cap B = C$ が成立することを示せ。ただし $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合とする。

$A \cap B = C$ を示すには (1) $A \cap B \supseteq C$ および (2) $A \cap B \subseteq C$ を示せばよい。$X \subseteq Y$ を示すには $\forall x \;\; x \in X \implies x \in Y$ を示せばよい。
(1) $A \cap B \supseteq C$ を示す：$n$ を $C$ の任意の元とすると，ある自然数 $k$ が存在して $n = 21k - 11$ と書ける。このとき

$$n = 21k - 11 = 3 \cdot 7k - 3 \cdot 3 - 2 = 3(7k-3) - 2$$

となる。$k$ は自然数なので $7k - 3$ も自然数である。よって $n \in A$ が成立する。また

$$n = 21k - 11 = 7 \cdot 3k - 7 - 4 = 7(3k-1) - 4$$

であり，$3k - 1$ も自然数なので，$n \in B$ が成立する。よって $n \in A \cap B$ が成立するので (1) が示された。

(2) $A \cap B \subseteq C$ を示す：$n$ を $A \cap B$ の任意の元とする。$n$ は $B$ の元なので，ある自然数 $k$ が存在して $n = 7k - 4$ と書ける。また $n \in A$ なので $n$ を 3 で割った余りは 1 である。ここで $k$ を 3 で割った余りで場合分けする。$k$ を 3 で割った余りは 0 または 1，2 なので，ある自然数 $k_1$ が存在して (a) $k = 3k_1$，(b) $k = 3k_1 - 2$，(c) $k = 3k_1 - 1$ のいずれかが成立する。
(a) のときは

$$n = 7k - 4 = 7 \cdot 3k_1 - 3 - 1 = 3(7k_1 - 1) - 1$$

となる。よって $n$ を 3 で割った余りは 2 となるが，$n \in A$ なら 3 で割った余りは 1 なので矛盾。この場合は起こらない。
(b) のときは

$$n = 7k - 4 = 7(3k_1 - 2) - 4 = 7 \cdot 3k_1 - 18 = 3(7k_1 - 6)$$

となる。$n$ は 3 で割り切れることになり $n \in A$ に矛盾。
よって (c) の場合のみが起こる。このとき

$$n = 7k - 4 = 7(3k_1 - 1) - 4 = 21k_1 - 11$$

となるので $n \in C$ である。よって (2) が示された。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 任意の自然数 $n$ に対し $n(n^2+2)$ は 3 で割り切れることを数学的帰納法で証明せよ。

「$n(n^2+2)$ は 3 で割り切れる」という命題を $P(n)$ と置く。
(1) $n = 1$ のとき：$1(1^2+2) = 3$ は 3 で割り切れる。よって $P(1)$ は正しい。
(2) $P(k)$ の成立を仮定する。即ち，$k(k^2+2)$ は 3 で割り切れることを仮定する。このときある自然数 $m$ が存在して $k(k^2+2) = 3m$ と書ける。

$$\begin{aligned}(k+1)\left((k+1)^2+2\right) &= k(k^2+2) + 3(k^2+k+1) \\ &= 3m + 3(k^2+k+1) \\ &= 3(m + k^2 + k + 1)\end{aligned}$$

$(k+1)\left((k+1)^2+2\right)$ も 3 で割り切れるので $P(k+1)$ も成立する。数学的帰納法により証明された。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるとは,

$$\forall x_1, x_2 \in X \ \ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

が成立することである。写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは,

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \ \ y = f(x)$$

が成立することである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射でない」という命題を「任意 ($\forall$)」と「存在 ($\exists$)」を用いて表せ。

$$\exists x_1, x_2 \in X \ \ x_1 \neq x_2 \land f(x_1) = f(x_2)$$

(2) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を「任意 ($\forall$)」と「存在 ($\exists$)」を用いて表せ。

$$\exists y \in Y \ \forall x \in X \ \ y \neq f(x)$$

(3) 写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定義する。このとき $f$ が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体のつくる集合である。

$1 \neq -1$ であり $f(1) = 1^2 = (-1)^2 = f(-1)$ なので $f$ は単射でない。全単射は全射かつ単射なので，$f$ は全単射でない。

(4) 写像 $f : [\,0, \infty\,) \longrightarrow [\,0, \infty\,)$ を $f(x) = x^2$ で定義する。このとき $f$ が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。ここで $[\,0, \infty\,) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geqq 0\,\}$ である。なお $x \geqq 0$ に対し $\sqrt{x}$ が存在することは仮定してよい。

$f$ は全単射である。まず $f$ が単射であることを示す。定義域は正の実数なので $0 \leqq x_1 < x_2$ に対し $x_1^2 < x_2^2$ が成立することを注意しておく。$x_1 \neq x_2$ とする。$x_1 < x_2$ のときは $f(x_1) = x_1^2 < x_2^2 = f(x_2)$ が成立し，$x_2 < x_1$ のときは $f(x_2) = x_2^2 < x_1^2 = f(x_1)$ が成立する。いずれの場合も $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成立するので $f$ は単射である。

$y$ を $[\,0, \infty\,)$ の任意の元とすると，$y \geqq 0$ より $\sqrt{y}$ が存在するので $x = \sqrt{y}$ と置く。このとき

$$f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$$

となるので $f$ は全射である。

以上により $f$ は全単射であることが分かる。

**裏にも問題あり。別紙にも問題あり**

| 学科 | | 在番籍号 | | 氏名 | |
|---|---|---|---|---|---|

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の連立方程式の解を求めよ。

$$x^3 - x + y = 0 \text{ かつ } y^3 + x - y = 0$$

$x^3 - x + y = 0$ を (1) 式，$y^3 + x - y = 0$ を (2) 式とする。(1) 式と (2) 式を加えると

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \tag{3}$$

が得られる。このとき

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x + y = 0 \quad \vee \quad x^2 - xy + y^2 = 0$$

が成立する。

$$x^2 - xy + y^2 = x^2 - 2x\frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

なので，$\left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 \geqq 0$ かつ $y^2 \geqq 0$ より，$x^2 - xy + y^2 = 0$ のとき $x - \dfrac{y}{2} = 0$ かつ $y = 0$ が成立する。よって，このときは $(x, y) = (0, 0)$ である。よって

$$(3) \text{ 式} \quad \Longleftrightarrow \quad x + y = 0 \quad \vee \quad (x, y) = (0, 0)$$

となる。
$x + y = 0$ のとき，この式を (1) 式に代入すると

$$x^3 - 2x = 0$$

より $x = 0, \pm\sqrt{2}$ を得る。以上により解は

$$(x, y) = (0, 0), \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

である。

$\boxed{\mathbf{7}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。