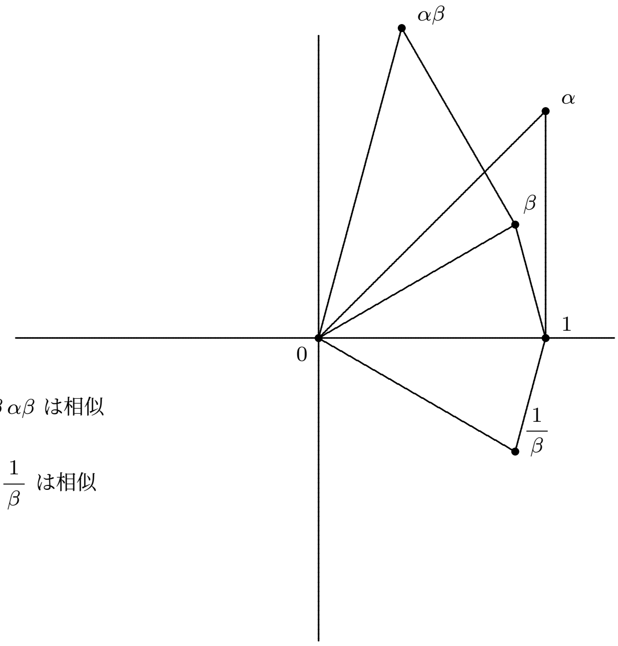
数学序論第 2 回試験

2011–7–11　　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

$\boxed{\textbf{1}}$ $\alpha = 1 + i, \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　α, β を複素平面に図示せよ。また $\alpha\beta$ および $\dfrac{1}{\beta}$ を作図により複素平面に図示し，どの様に作図したか説明せよ。作図はフリーハンドでよいが，どの角とどの角が等しいか等の情報は図に書き入れること。



$\triangle\, 01\alpha$ と $\triangle\, 0\beta\,\alpha\beta$ は相似

$\triangle\, 0\beta 1$ と $\triangle\, 01\dfrac{1}{\beta}$ は相似

(2)　(1) で用いた $\alpha\beta$ の作図方法が正しい理由を述べよ。

$\alpha = r_1 e^{i\theta_1}, \beta = r_2 e^{i\theta_2}$ と極座標表示したとき，

$$\alpha\beta = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

となる。よって図の $\alpha\beta$ の偏角がそれぞれの和になり，絶対値が積になれば作図が正しいことが分かる。
$\angle 10\beta$ は θ_2 である。また $\triangle\, 01\alpha$ と $\triangle\, 0\beta\,\alpha\beta$ は相似なので，$\angle\beta 0\alpha\beta$ は θ_1 である。よって $\angle 10\alpha\beta = \theta_1 + \theta_2$ となる。
$\triangle\, 01\alpha$ と $\triangle\, 0\beta\,\alpha\beta$ は相似なので辺の比は等しい。よって $\overline{0\alpha\beta} : \overline{0\beta} = \overline{0\alpha} : \overline{01}$ が成立する。このとき $\overline{0\alpha\beta} = \overline{0\alpha} \cdot \overline{0\beta}$ となるので絶対値が積になっていることが分かる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ 三角関数の加法定理

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \qquad \cos(x+y) = cosx \cos y - \sin x \sin y$$

および指数関数の指数法則

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

は知られているとする。このときこれらから次の式を導け。

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

このとき関係式

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

を用いてもよいし，用いなくてもよい。

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \frac{e^{i\beta} + e^{-i\beta}}{2} \\
&= \frac{1}{4i}\Big(e^{i\alpha}e^{i\beta} - e^{-i\alpha}e^{i\beta} + e^{i\alpha}e^{-i\beta} - e^{-i\alpha}e^{-i\beta}\Big) \\
&= \frac{1}{4i}\Big(e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)} + e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}\Big) \\
&= \frac{1}{4i}\Big(e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i} + \frac{e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)}}{2i}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Big)
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 複素数 $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対し共役複素数 $\overline{z}$ とは

$$\overline{z} = x - iy$$

で定義された。複素数 α, β に対し

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$$

が成立することを示せ。

$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \beta = \beta_1 + i\beta_2$ とおく。ただし。$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ は実数とする。このとき $\overline{\alpha} = \alpha_1 - i\alpha_2, \overline{\beta} = \beta_1 - i\beta_2$ なので

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}\,\overline{\beta} &= (\alpha_1 - i\alpha_2)(\beta_1 - i\beta_2) \\ &= (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) - i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\end{aligned}$$

となる。一方

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (\alpha_1 + i\alpha_2)(\beta_1 + i\beta_2) \\ &= (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) + i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\end{aligned}$$

となるので

$$\overline{\alpha\beta} = (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) - i(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

となる。よって

$$\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$$

の成立が示される。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 対数に関する命題

$$\log_a p^\ell = \ell \log_a p$$

を証明せよ。ただし対数関数 $y = \log_a x$ が指数関数の逆関数であること，即ち $y = \log_a x \iff x = a^y$，および指数法則のみ用いて示すこと。

$y = \log_a p$ とおくと $p = a^y$ が成立する。この式の両辺を ℓ 乗すると

$$p^\ell = (a^y)^\ell = a^{y\ell} = a^{\ell y}$$

となる。ここで指数法則を用いた。この関係を対数に戻すと

$$\ell y = \log_a p^\ell$$

となり $\log_a p^\ell = \ell \log_a p$ が示された。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の式を証明せよ。

$$\mathrm{Arccos}\,\frac{3}{5} + \mathrm{Arccos}\,\frac{12}{13} = \mathrm{Arccos}\,\frac{16}{65}$$

$\alpha = \mathrm{Arccos}\,\dfrac{3}{5}$ とおくと

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \qquad (0 \leqq \alpha \leqq \pi)$$

が成立している。$\beta = \mathrm{Arccos}\,\dfrac{12}{13}$ とおくと

$$\cos\beta = \frac{12}{13} \qquad (0 \leqq \beta \leqq \pi)$$

が成立している。ここで $\dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{13}$ は共に正なので

$$\alpha < \frac{\pi}{2}, \qquad \beta < \frac{\pi}{2}$$

が成立していることを注意しておく。$\sin\alpha, \sin\beta$ ともに正なので

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$
$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

が成立する。従って

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{5}\,\frac{12}{13} - \frac{4}{5}\,\frac{5}{13} = \frac{16}{65}$$

が成立する。最初の注意より $0 \leqq \alpha+\beta < \pi$ なので $\alpha+\beta = \mathrm{Arccos}\,\dfrac{16}{65}$ 即ち

$$\mathrm{Arccos}\,\frac{3}{5} + \mathrm{Arccos}\,\frac{12}{13} = \mathrm{Arccos}\,\frac{16}{65}$$

が成立する。