数学序論第３回試験

2011–8–4　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 関数 $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ の導関数を定義に基づいて求めよ。

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\frac{x^2-x^2-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2}\right)\\ &= -\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2}\end{aligned}$$

となるので

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2}$$
$$= -\frac{2}{x^3}$$

となる。

2 次の関数の導関数を求めよ。ただし $(\sin x)' = \cos x$, $(a^x)' = a^x \cdot \log a$ 等の諸公式を用いてよい。

$$y = f(x) = e^{3x}\cdot\sin\left(x^2\right)$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(e^{3x}\right)'\sin\left(x^2\right) + e^{3x}\left(\sin\left(x^2\right)\right)'\\ &= 3e^{3x}\sin\left(x^2\right) + 2xe^{3x}\cos\left(x^2\right)\end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $y = f(x) = x^2 \log x$ に対し増減表を書き，グラフの凹凸および変曲点を調べ，概形を描け。

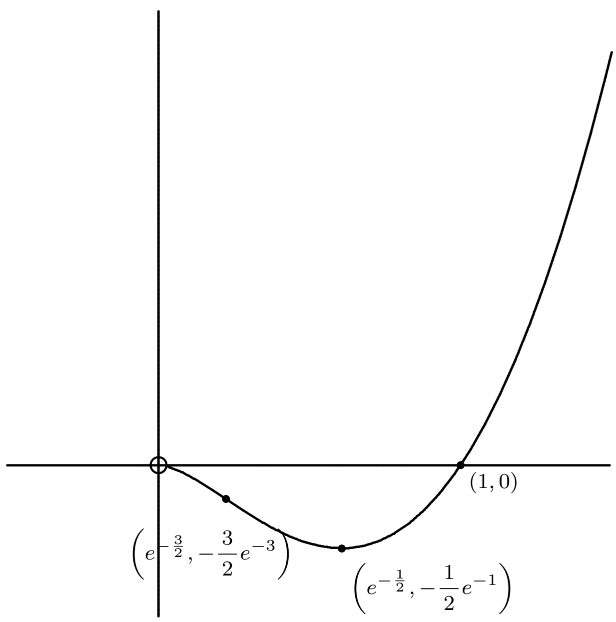
$\log x$ が定義されるのは $x > 0$ なので $f(x)$ の定義域も $x > 0$ である。$f'(x) = \left(x^2\right)' \log x + x^2 \left(\log x\right)' = 2x \log x + x^2 \dfrac{1}{x} = 2x \log x + x$, $f''(x) = 2 \log x + 3$ となる。$f'(x) = 0$ を解いて $x = e^{-\frac{1}{2}}$ を得る。また $f''(x) = 0$ を解いて $x = e^{-\frac{3}{2}}$ を得る。間の正負を調べることにより，増減表は次の様になることが分かる。

x		$e^{-\frac{3}{2}}$		$e^{-\frac{1}{2}}$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{3}{2}e^{-3}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}e^{-1}$	$\nearrow$

よって変曲点は $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\dfrac{3}{2}e^{-3}\right)$ であり，区間 $\left(\ 0,\ e^{-\frac{3}{2}}\ \right)$ で上に凸，区間 $\left(\ e^{-\frac{3}{2}},\ \infty\ \right)$ で下に凸になる。

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{\log x}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +0} \frac{(\log x)'}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x \to +0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-2\dfrac{1}{x^3}} = -\lim_{x \to +0} \frac{x^2}{2} = 0$$

であり，$f(x) = 0$ の解が $x = 1$ であることに注意するとグラフの概形は下のようになる。



$\boxed{\mathbf{4}}$ 原点を通る直線が曲線 $y = x^2 + 1$ に接している。このときの直線の方程式を求めよ。

$y' = 2x$ なので接点を $(a, a^2 + 1)$ とすると接線の方程式は

$$y = 2a(x - a) + a^2 + 1 = 2ax - a^2 + 1$$

となる。これが原点を通るので $-a^2 + 1 = 0$，よって $a = \pm 1$ である。よって求める接線の方程式は

$$y = 2x, \qquad y = -2x$$

である。

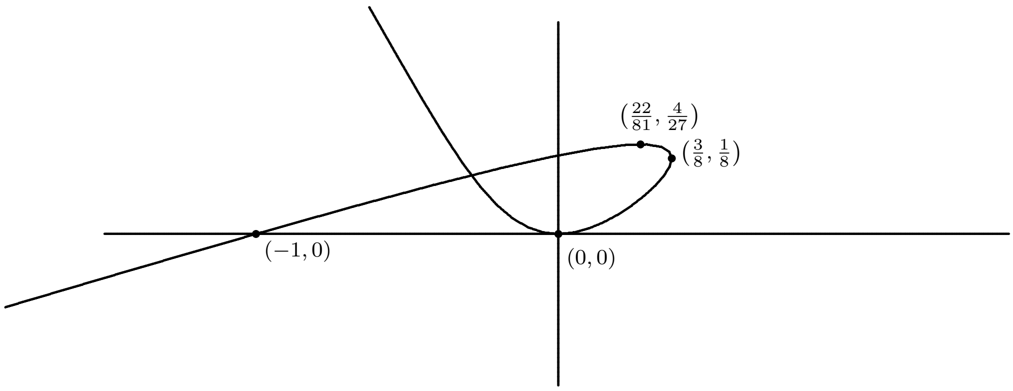
5 次のようにパラメーター表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = t - 2t^4, \qquad y = y(t) = t^2 - t^3$$

$x'(t) = 1 - 8t^3, y'(t) = 2t - 3t^2$ である。$x'(t) = 0$ を解くと $t = \dfrac{1}{2}$ が得られ，$y'(t) = 0$ を解くと $t = 0, \dfrac{2}{3}$ が得られる。
$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
x'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$
曲線	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $(x(0), y(0)) = (0, 0)$，$\left(x\left(\dfrac{1}{2}\right), y\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{3}{8}, \dfrac{1}{8}\right)$，$\left(x\left(\dfrac{2}{3}\right), y\left(\dfrac{2}{3}\right)\right) = \left(\dfrac{22}{81}, \dfrac{4}{27}\right)$，
である。$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, 1$ を得る。$(x(0), y(0)) = (0, 0)$，$(x(1), y(1)) = (-1, 0)$ なので x 軸との交点は $(0, 0), (-1, 0)$ である。
$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ を得る。y 軸との交点は $(0, 0), \left(0, \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} - \dfrac{1}{2}\right)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



6 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n\right)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n} - n &= \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} + 1}\end{aligned}$$

なので

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$$

となる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{7}}$ 極限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)}$ を求めよ。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x - e^{-x}\right)'}{(\log(1+x))'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\dfrac{1}{1+x}}\\ &= \lim_{x\to 0}(1+x)(e^x + e^{-x}) = 2\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ 不定積分

$$\int x\left(x^2+1\right)^{100}\,dx$$

を求めよ。どのような方法 (置換積分，部分積分等) で解いたか分かるように計算過程もきちんと書くこと。

$u = x^2+1$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 2x$ なので

$$\begin{aligned}\int x\left(x^2+1\right)^{100}\,dx &= \int xu^{100}\frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int u^{100}\,du\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{101}u^{101} = \frac{1}{202}(x^2+1)^{101}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ 不定積分

$$\int x\sin x\,dx$$

を求めよ。どのような方法 (置換積分，部分積分等) で解いたか分かるように計算過程もきちんと書くこと。

$x = g, f' = \sin x$ とおくと $f = -\cos x$ なので

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= -x\cos x - \int (x)'\,(-\cos x)\,dx\\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx\\ &= -x\cos x + \sin x\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。