数学序論第１回試験

2012–6–5　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 P, Q を命題とする。$\neg P$，$P \wedge Q$，$P \vee Q$，$P \implies Q$ の真理表は下のようになっている。$P \wedge (Q \vee R)$ と $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ が同値であるかどうかを真理表を用いて調べよ。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

$P \wedge (Q \vee R)$，$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ の真理表を書くと下記のようになる。

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

$P \wedge (Q \vee R)$ と $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ は対応する欄の真理値が同じであるので同値である。

2 次の命題の否定命題をつくれ。またもとの命題の真偽を判定せよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体からなる集合である。

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \ (x - 2x^2 > 0 \wedge x < 0)$$

否定命題は

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ (x - 2x^2 \leqq 0 \vee x \geqq 0)$$

である。

「$x - 2x^2 > 0 \iff 0 < x < \frac{1}{2}$」なので，命題の条件は

$$(x - 2x^2 > 0 \wedge x < 0) \iff (0 < x < \frac{1}{2} \wedge x < 0)$$

と書き換えられるので，条件を満たす x は存在しない。よって命題は偽である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{3}$ 平面のベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^2$ と書く。$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を平面のベクトルとする。ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が次の条件をみたすとき，$\mathbb{R}^2$ を**生成**するという；

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2\ \exists a_1 \in \mathbb{R}\ \exists a_2 \in \mathbb{R}\quad \boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

(1) 「ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が $\mathbb{R}^2$ を生成しない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists x \in \mathbb{R}^2\ \forall a_1 \in \mathbb{R}\ \forall a_2 \in \mathbb{R}\quad \boldsymbol{x} \neq a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

(2) 次のベクトルの組が $\mathbb{R}^2$ を生成するかどうか調べよ。

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$a_1 = \frac{2y - x}{3},\ a_2 = \frac{2x - y}{3}$$

とおく。このとき

$$\begin{aligned} a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 &= \frac{2y-x}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2x-y}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2y - x + 2(2x - y) \\ 2(2y - x) + 2x - y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

となる。よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成する。

$\boxed{4}$ $h \geqq 0$ のとき任意の自然数 n に対し $(1+h)^n \geqq 1 + nh$ が成立することを数学的帰納法で証明せよ。

$n = 1$ のとき

$$(1+h)^1 = 1 + h = 1 + 1 \cdot h$$

なので成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $(1+h)^k \geqq 1 + kh$ を仮定する。これを用いると

$$\begin{aligned} (1+h)^{k+1} &= (1+h)^k \cdot (1+h) \geqq (1+kh) \cdot (1+h) \\ &= 1 + kh + h + kh^2 = 1 + (k+1)h + kh^2 \end{aligned}$$

となるが，$kh^2 \geqq 0$ より $(1+h)^{k+1} \geqq 1 + (k+1)h$ が得られる。
$n = k + 1$ でも成立するので，数学的帰納法によりすべての自然数で成立する。

$\boxed{5}$ 次の連立方程式の解を求めよ。

$$(y-2x^2y)2^{-x^2-y^2}=0 \text{ かつ } (x-2xy^2)2^{-x^2-y^2}=0$$

指数関数は 0 になることはないので連立方程式は $y-2x^2y=0$ (1 式) かつ $x-2xy^2=0$ (2 式) と考えることができる。

$$\begin{aligned} y-2x^2y=y(1-2x^2)=0 &\iff y=0 \text{ または } 1-2x^2=0 \\ x-2xy^2=x(1-2y^2)=0 &\iff x=0 \text{ または } 1-2y^2=0 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} 1 \text{ 式かつ } 2 \text{ 式} \iff & (1)\ x=0 \text{ かつ } y=0\text{，または} \\ & (2)\ x=0 \text{ かつ } 1-2x^2=0\text{，または} \\ & (3)\ 1-2y^2=0 \text{ かつ } y=0\text{，または} \\ & (4)\ 1-2y^2=0 \text{ かつ } 1-2x^2=0 \end{aligned}$$

が成立する。(1) のときは $(x,y)=(0,0)$ になる。(2) のときは $x=0$ を $1-2x^2=0$ を代入すると $1=0$ が成立する。これは矛盾なのでこのとき解は存在しない。(3) のとき $y=0$ を $1-2y^2=0$ を代入すると $1=0$ が成立する。これは矛盾なのでこのとき解は存在しない。(4) のときは $1-2x^2=0$ より $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，$1-2y^2=0$ より $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。
これらの解を最初に式に代入すると式は成立する。以上により

$$(x,y)=(0,0),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

を得る。

$\boxed{6}$ 次の問に答えよ。

(1)　集合 A,B が $A\subseteq B$ であることの定義は

$$\forall a\ \ a\in A \implies a\in B$$

であるがこの否定命題を述べよ。

$$\exists a\ \ a\in A\wedge a\notin B$$

(2)　$\mathbb{Q}$ を有理数全体からなる集合，$\mathbb{R}$ を実数全体からなる集合とする。$\mathbb{R}\subseteq\mathbb{Q}$ が成立しないことを示せ。

$a=\sqrt{2}$ とすると $a\in\mathbb{R}$ であるが $a\notin\mathbb{Q}$ である。よって $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{Q}$ は成立しない。

(3)　$\mathbb{Q}=\mathbb{R}$ が成立しないことを示せ。

$\mathbb{Q}=\mathbb{R}$ が成立するためには

$$\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R} \text{ かつ } \mathbb{R}\subseteq\mathbb{Q}$$

が成立する必要がある。(2) により $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{Q}$ が成立しないので $\mathbb{Q}=\mathbb{R}$ も成立しない。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{7}}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるとは,

$$\forall x_1, x_2 \in X \;\; x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

が成立することである。写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは,

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X \;\; y = f(x)$$

が成立することである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists x_1, x_2 \in X \;\; x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

(2) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists y \in Y \;\; \forall x \in X \;\; y \neq f(x)$$

(3) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ $f : A \longrightarrow B$ を $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 2$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。

$1 \neq 3$ であるが, $f(1) = f(3)$ なので f は単射ではない。よって全単射でもない。

(4) 写像 $f : [\,0, \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体のつくる集合である。

$-1 \in \mathbb{R}$ であり, 任意の $x \in [\,0, \infty\,)$ に対し $f(x) = x^2 \geqq 0$ なので $f(x) \neq -1$ である。f は全射ではない。よって全単射でもない。

$\boxed{\mathbf{8}}$ 授業についての感想, 数学について思う事などがあれば記せ。2 年生以上の人には昨年までの黒板を用いた講義と今年のプロジェクターを用いる講義を比較しての感想を期待します (10)。