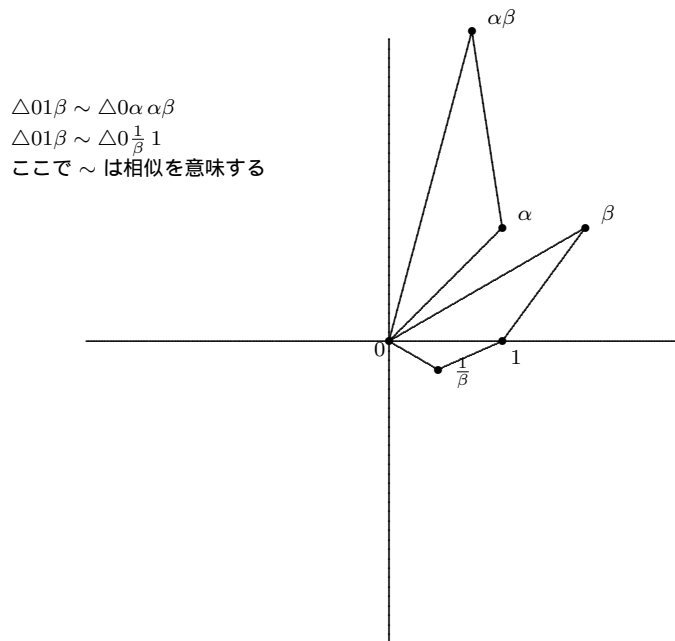


注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に、数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
 ・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては白紙答案より低い点数になる場合がある。careless miss でそのような事はないが、「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
 ・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
 ・在籍番号欄について：2年生以上は10桁の在籍番号を書く事。1年生は出席番号(多くは2桁)でよい。

1 $\alpha = 1 + i, \beta = \sqrt{3} + i$ とする。次の問いに答えよ。

(1) α, β を複素平面に図示せよ。また $\alpha\beta$ および $\frac{1}{\beta}$ を作図により複素平面に図示し、どの様に作図したか説明せよ。作図はフリーハンドでよいが、どの角とどの角が等しいか等の情報は図に書き入れること。



(2) (1) で用いた $\alpha\beta$ の作図方法が正しい理由を述べよ。

$\alpha = r_a e^{i\theta_a}, \beta = r_b e^{i\theta_b}$ と極形式で表示すると $\alpha\beta = r_a r_b e^{i(\theta_a + \theta_b)}$ である。 $\alpha\beta$ が表す点を P , 0 が表す点を O , 1 が表す点を U としたとき

$$\overline{OP} = r_a r_b, \quad \angle POU = \theta_a + \theta_b$$

が成立していれば作図は正しい $\alpha\beta$ の点を与えていることが分かる。

α が表す点を A , β が表す点を B とする。 $\Delta OBU \sim \Delta OPA$ より $\angle POA = \angle BOU = \theta_b$ となる。よって

$$\angle POU = \angle POA + \angle AOU = \angle BOU + \angle AOU = \angle AOU + \angle BOU = \theta_a + \theta_b$$

となる。また $\Delta OBU \sim \Delta OPA$ より $\overline{OP} : \overline{OA} = \overline{OB} : \overline{OU}$ となるので $|\alpha\beta| : |\alpha| = |\beta| : 1$ が成立し

$$\overline{OP} = |\alpha| \cdot |\beta| = r_a r_b$$

が得られる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学		在		氏	
科		籍		名	
		号			

2 三角関数の加法定理

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

および指数関数の指数法則

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

は知られているとする。これらを用いて $\tan(\alpha + \beta)$ を $\tan \alpha$ と $\tan \beta$ の式で表せ。このとき関係式

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

を用いてもよいし、用いなくてもよい。

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

3 複素数 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対し絶対値 $|z|$ とは

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

で定義された。複素数 α, β に対し

$$|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

が成立することを示せ。

$\alpha = x_1 + iy_1, \beta = x_2 + iy_2$ ($x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$) とおくと

$$|\alpha| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad |\beta| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

である。 $\alpha\beta = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ なので

$$\begin{aligned} |\alpha\beta|^2 &= (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 = x_1^2x_2^2 - 2x_1y_1x_2y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1y_2x_2y_1 + x_2^2y_1^2 \\ &= x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 = x_1^2(x_2^2 + y_2^2) + y_1^2(x_2^2 + y_2^2) = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \\ &= |\alpha|^2|\beta|^2 \end{aligned}$$

を得る。 $|\alpha| \geq 0, |\beta| \geq 0, |\alpha\beta| \geq 0$ より $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ が成立する。

4 対数に関する命題

$$\log_a(p \cdot q) = \log_a p + \log_a q$$

を証明せよ。ただし対数関数 $y = \log_a x$ が指数関数の逆関数であること、即ち $y = \log_a x \iff x = a^y$ 、および指数法則のみ用いて示すこと。

$X = \log_a p, Y = \log_a q$ とおくと $p = a^X, q = a^Y$ が成立している。指数法則より

$$pq = a^X a^Y = a^{X+Y}$$

が成立する。これを対数に直すと

$$X + Y = \log_a(p \cdot q)$$

となる。よって

$$\log_a(p \cdot q) = \log_a p + \log_a q$$

である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学		在番		氏	
科		籍号		名	

5 次の式を証明せよ。

$$\arccos \frac{24}{25} + \arccos \frac{12}{13} = \arcsin \frac{204}{325}$$

$\alpha = \arccos \frac{24}{25}, \beta = \arccos \frac{12}{13}$ とおくと

$$\cos \alpha = \frac{24}{25} \quad (0 \leq \alpha \leq \pi), \quad \cos \beta = \frac{12}{13} \quad (0 \leq \beta \leq \pi)$$

が成立している。 $\cos \alpha \geq 0, \cos \beta \geq 0$ より $\alpha \leq \frac{\pi}{2}, \beta \leq \frac{\pi}{2}$ である。よって $\sin \alpha \geq 0, \sin \beta \geq 0$ が成立している。

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \left(\frac{7}{25}\right)^2$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

より $\sin \alpha = \frac{7}{25}, \sin \beta = \frac{5}{13}$ である。

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{7}{25} \frac{12}{13} + \frac{24}{25} \frac{5}{13} \\ &= \frac{204}{325} \end{aligned}$$

$0 \leq \alpha + \beta \leq \pi$ となるが

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{24}{25} \frac{12}{13} - \frac{7}{25} \frac{5}{13} \\ &= \frac{253}{325} \geq 0 \end{aligned}$$

より $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$ である。よって

$$\alpha + \beta = \arcsin \frac{204}{325}$$

である。