# 数学序論第 3 回試験

2012–8–1　　河野

**注意**：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

**1** 関数 $y = f(x) = x^3$ の導関数を定義に基づいて求めよ。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right) = 3x^2 \end{aligned}$$

**2** 次の関数の導関数を求めよ。ただし $(\sin x)' = \cos x$, $(a^x)' = a^x \cdot \log a$ 等の諸公式を用いてよい。

$$y = f(x) = 2^{5x}\cdot\sin\left(x^2+2x\right)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2^{5x}\sin(x^2+2x)\right)' = \left(2^{5x}\right)'\sin(x^2+2x) + 2^{5x}\left(\sin(x^2+2x)\right)' \\ &= 5\cdot 2^{5x}\log 2\sin(x^2+2x) + (2x+2)2^{5x}\cos(x^2+2x) \end{aligned}$$

**3** 点 $(0,-1)$ を通る直線が曲線 $y = f(x) = x^2 - x + 1$ に接している。このとき直線の方程式を求めよ。

$f'(x) = 2x - 1$ なので $x = a$ における接線の方程式は

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = (2a-1)(x-a) + a^2 - a + 1 = (2a-1)x - a^2 + 1$$

である。これが点 $(0,-1)$ を通るので $-a^2+1 = -1$ となる。$a = \pm\sqrt{2}$ なので求める方程式は

$$y = (2\sqrt{2}-1)x - 1, \qquad y = (-2\sqrt{2}-1)x - 1$$

である。

**裏にも問題あり。別紙にも問題あり**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 学科 | | 在籍番号 | | 氏名 | |

**4** 関数 $y=f(x)=x^3\log x$ に対しグラフの凹凸および増減表を書き，変曲点を調べ，概形を描け。

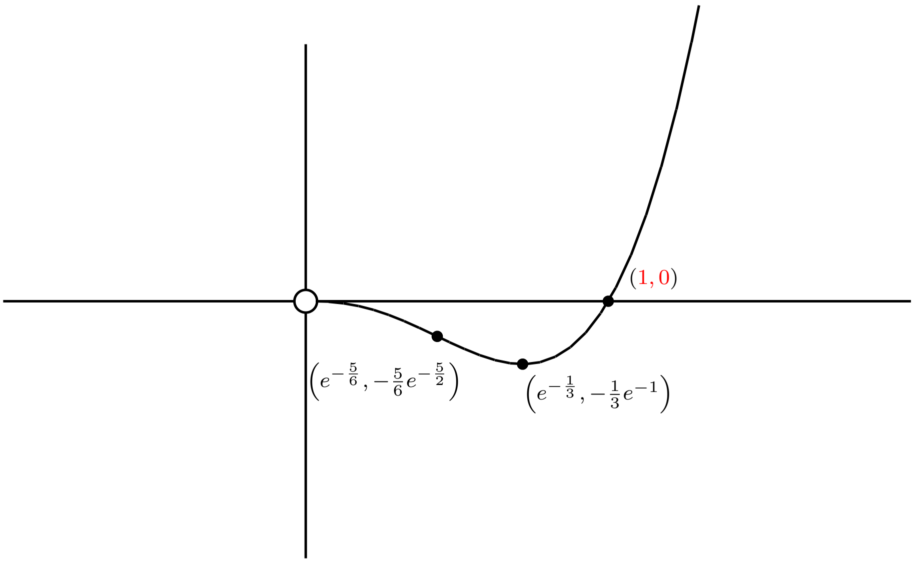
$\log x$ が定義されるのは $x>0$ なので $f(x)$ の定義域も $x>0$ である。$f'(x)=3x^2\log x+x^3\dfrac{1}{x}=x^2\left(3\log x+1\right)$，$f''(x)=x(6\log x+5)$ である。$f'(x)=0$ より $x=e^{-\frac{1}{3}}$ を，$f''(x)=0$ より $x=e^{-\frac{5}{6}}$ を得る。間の $f'(x), f''(x)$ の正負を調べることにより増減表は次の様になる。

| $x$ | | $e^{-\frac{5}{6}}$ | | $e^{-\frac{1}{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}}$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{3e}$ | $\nearrow$ |

よって変曲点は $\left(e^{-\frac{5}{6}}, -\dfrac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}}\right)$ であり，区間 $\left(0, e^{-\frac{5}{6}}\right)$ で上に凸，区間 $\left(e^{-\frac{5}{6}}, \infty\right)$ で下に凸になる。
$x\to+0$ としたときの関数の挙動を調べる。ここでロピタルの定理を用いる。

$$\lim_{x\to+0}x^3\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x^3}}=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\log x\right)'}{\left(\dfrac{1}{x^3}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to+0}x^3=0$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ であり，また $f(x)=0$ となるのは $x=1$ のときのみである。このことに注意してグラフを描くと次図の様になる。




**5** 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$$

$\left(\dfrac{5}{2}\right)^n\to\infty\quad(n\to\infty)$ および $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\to 0\quad(n\to\infty)$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{5^n+1}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}=0$$

**6** 次のようにパラメーター表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = t^2 - t^3, \qquad y = y(t) = 2t^4 - t$$

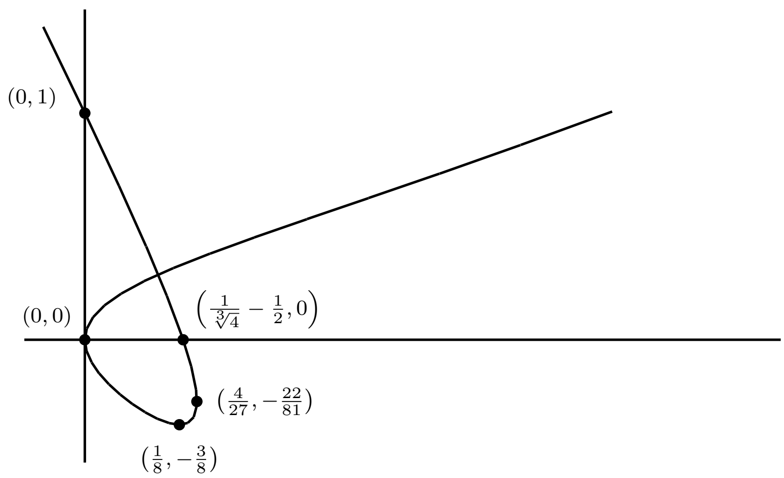
$x'(t) = 2t - 3t^2$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = 0, \frac{2}{3}$ を得る。$y'(t) = 8t^3 - 1$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = \frac{1}{2}$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

| $t$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{2}{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x$ | $\leftarrow$ | | $\rightarrow$ | $\rightarrow$ | $\rightarrow$ | | $\leftarrow$ |
| $y'$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ |
| 曲線 | $\swarrow$ | $\downarrow$ | $\searrow$ | $\rightarrow$ | $\nearrow$ | $\uparrow$ | $\nwarrow$ |

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $(x(0), y(0)) = (0, 0)$, $\left(x\left(\frac{1}{2}\right), y\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)$, $\left(x\left(\frac{2}{3}\right), y\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{27}, -\frac{22}{81}\right)$, である。

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, 1$ を得る。$(x(0), y(0)) = (0, 0)$, $(x(1), y(1)) = (0, 1)$ なので $y$ 軸との交点は $(0, 0), (0, 1)$ である。

$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ を得る。$x$ 軸との交点は $(0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{2}, 0\right)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。




**7** 極限 $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x}\right)$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x}\right) &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x \sin x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x - x \cos x)'}{(x^2 \sin x)'} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + x \cos x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(2 \sin x + x \cos x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2 \cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

**裏にも問題あり。別紙にも問題あり**

| 学科 | | 在番籍号 | | 氏名 | |
|---|---|---|---|---|---|

$\boxed{\mathbf{8}}$ $f(x)$ の不定積分 $F(x)=\int f(x)\,dx$ は $\dfrac{dF}{dx}=f(x)$ を満たす関数として定義される。このとき次が成立することを示せ。

$$\int \{f(x)+g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

$F(x)=\int f(x)\,dx,\ G(x)=\int g(x)\,dx$ とおくと $\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x),\ \dfrac{d}{dx}G(x)=g(x)$ となる。よって

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)+G(x)\right)=\frac{d}{dx}F(x)+\frac{d}{dx}G(x)=f(x)+g(x)$$

より

$$\int \{f(x)+g(x)\}\,dx=F(x)+G(x)=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$$

が成立する。

$\boxed{\mathbf{9}}$ 不定積分

$$\int (x+1)\left(x^2+2x+3\right)^{99}\,dx$$

を求めよ。どのような方法 (置換積分，部分積分等) で解いたか分かるように計算過程もきちんと書くこと。

$u=x^2+2x+3$ とおくと $\dfrac{du}{dx}=2x+2$ より $dx=\dfrac{1}{2x+2}du$ となる。

$$\begin{aligned}\int (x+1)\left(x^2+2x+3\right)^{99}\,dx&=\int (x+1)u^{99}\frac{1}{2x+2}\,du=\frac{1}{2}\int u^{99}\,du\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}u^{100}=\frac{1}{200}(x^2+2x+3)^{100}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ 不定積分

$$\int x\cos x\,dx$$

を求めよ。どのような方法 (置換積分，部分積分等) で解いたか分かるように計算過程もきちんと書くこと。

部分積分法 $\int fg'\,dx=fg-\int f'g\,dx$ を用いる。

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx&=\int x\,(\sin x)'\,dx=x\sin x-\int x'\sin x\,dx\\&=x\sin x+\cos x\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。