数学序論第１回試験

2013–6–7　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 P, Q を命題とする。$\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \implies Q$ の真理表は下のようになっている。$P \implies Q$ と $P \vee \neg Q$ が同値であるかどうかを真理表を用いて調べよ。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

$P \implies Q$, $P \vee \neg Q$ の真理表を書くと下記のようになる。

P	Q	$P \implies Q$	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

$P \implies Q$ と $P \vee \neg Q$ は対応する欄の真理値が同じではないので同値でない。

2 次の命題の否定命題をつくれ。またもとの命題の真偽を判定せよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体からなる集合である。

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \geq 0$$

否定命題は

$$\exists x \in \mathbb{R} \;\; x^4 - x^2 + \frac{1}{5} < 0$$

である。
$f(x) = x^4 - x^2 + \dfrac{1}{5}$ とする。

$$f(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{5} = x^4 - 2x^2\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{5} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{20}$$

なので $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{20}$ となる。$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ なので否定命題が成立する。よって命題は偽である。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面のベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^2$ と書く。$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を平面のベクトルとする。ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が次の条件をみたすとき，$\mathbb{R}^2$ を**生成**するという；

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2\ \exists a_1 \in \mathbb{R}\ \exists a_2 \in \mathbb{R}\ \ \boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

(1) 「ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が $\mathbb{R}^2$ を生成しない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists x \in \mathbb{R}^2\ \forall a_1 \in \mathbb{R}\ \forall a_2 \in \mathbb{R}\ \ \boldsymbol{x} \neq a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

(2) 次のベクトルの組が $\mathbb{R}^2$ を生成するかどうか調べよ。

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

「$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成する」と仮定する。
仮定よりベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し実数 a_1, a_2 が存在して

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

と書ける。このとき

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 \\ 2(a_1 + 2a_2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

このとき

$$1 = 2(a_1 + 2a_2) = 2 \cdot 1 = 2$$

となり矛盾。よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成しない。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2 以上の任意の自然数 n は素数の積に分解できること，即ち n に対し素数 $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ で $n = p_1p_2\cdots p_\ell$ となるものが存在すること ($\ell = 1$ の場合もあることに注意) を数学的帰納法で証明せよ。素数とは自分自身と 1 以外では割り切れない 2 以上の自然数である。

証明すべき命題を $P(n)$ とする。
(1) $n = 2$ のとき：2 は素数なので $2 = 2$ という形で素数の積に分解されている。よって $P(2)$ は正しい。
(2) n より小さい 2 以上のすべての自然数 k に対し $P(k)$ の成立を仮定して $P(n)$ の成立を示す：n を 3 以上の自然数とする。n は素数であるか，素数でないかのいずれかである。
n が素数のときは $n = n$ と素数の積に分解されている。
n が素数ではないとき，定義により $1 < n_1 < n$ となる自然数 n_1 が存在し n は n_1 で割り切れる。よって自然数 n_2 が存在し，$n = n_1n_2$ となる。このとき $1 < n_1 < n$ かつ $1 < n_2 < n$ が成立しているので，帰納法の仮定より $P(n_1)$ および $P(n_2)$ が成立している。よって素数 $p_1, p_2, \ldots, p_s$ が存在して $n_1 = p_1p_2\cdots p_s$ となっている。また素数 $q_1, q_2, \ldots, q_t$ が存在して $n_2 = q_1q_2\cdots q_t$ となっている。$n = n_1n_2 = p_1p_2\cdots p_sq_1q_2\cdots q_t$ となるので n も素数の積に分解できる。よって $P(n)$ が成立する。
以上により 2 以上の自然数 n に対し $P(n)$ が成立することが示された。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の連立方程式の解を求めよ。

$$x^3 - x + y = 0 \text{ かつ } y^3 + x - y = 0$$

$x^3 - x + y = 0$ を **1 式**, $y^3 + x - y = 0$ を **2 式**とする。1 式と 2 式を加えると $x^3 + y^3 = 0$ を得る。$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$ なので

$$x^3 + y^3 = 0 \iff \left(x + y = 0 \ \vee \ x^2 - xy + y^2 = 0\right)$$

が成立している。

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

なので

$$x^2 - xy + y^2 = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}y = 0 \ \wedge \ y = 0\right) \iff (x = 0 \ \wedge \ y = 0)$$

となる。よって

$$\left(x + y = 0 \ \vee \ x^2 - xy + y^2 = 0\right) \iff (x + y = 0 \ \vee \ (x, y) = (0, 0)) \iff x + y = 0$$

が成立するので

$$x^3 + y^3 = 0 \iff x + y = 0$$

が分かる。この式を **3 式**とすると

$$1 \text{ 式} \wedge 2 \text{ 式} \iff 1 \text{ 式} \wedge 3 \text{ 式}$$

が成立するので，1 式と 3 式からなる連立方程式を解けばよいことが分かる。3 式を 1 式に代入することにより $x^3 - 2x = 0$ が得られる。$x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$ なので $x = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ となる。
これらの解を最初に式に代入すると式は成立する。よって解は $(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ である。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の問に答えよ。

(1) 集合 A, B が $A \subseteq B$ であることの定義は

$$\forall a \ \ a \in A \implies a \in B$$

であるがこの否定命題を述べよ。

$$\exists a \ \ a \in A \wedge a \notin B$$

(2) $\mathbb{Q}$ を有理数全体からなる集合，$\mathbb{Z}$ を整数全体からなる集合とする。$\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{Q}$ が成立しないことを示せ。

$a = \dfrac{1}{2}$ とすると $a \in \mathbb{Q}$ であるが $a \notin \mathbb{Z}$ である。よって $\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{Q}$ は成立しない。

(3) $\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ が成立しないことを示せ。

$\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ が成立するためには

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \text{ かつ } \mathbb{Z} \supseteq \mathbb{Q}$$

が成立する必要がある。(2) により $\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{Q}$ が成立しないので $\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ も成立しない。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{7}}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるとは,
$$\forall x_1, x_2 \in X \ \ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$
が成立することである。写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは,
$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \ \ y = f(x)$$
が成立することである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists x_1, x_2 \in X \ \ x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

(2) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists y \in Y \ \ \forall x \in X \ \ y \neq f(x)$$

(3) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ $f : A \longrightarrow B$ を $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 1$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。

$2 \neq 4$ であるが, $f(2) = f(4)$ なので f は単射ではない。よって全単射でもない。

(4) 写像 $f : [\,0, \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^3$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体のつくる集合である。

x を $[\,0, \infty\,)$ の任意の元とすると, $x \geq 0$ より $f(x) = x^3 \geq 0$ である。よって $-1 \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) = -1$ となる x は存在しない。f は全射ではない。

よって全単射でもない。

$\boxed{\mathbf{8}}$ 授業についての感想, 数学について思う事などがあれば記せ。2 年生以上の人には昨年までの黒板を用いた講義と今年のプロジェクターを用いる講義を比較しての感想を期待します (10)。