数学序論第１回試験

2013–6–7　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1　P, Q を命題とする。$\neg P$，$P \wedge Q$，$P \vee Q$，$P \implies Q$ の真理表は下のようになっている。$P \implies Q$ と $P \vee \neg Q$ が同値であるかどうかを真理表を用いて調べよ。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

2　次の命題の否定命題をつくれ。またもとの命題の真偽を判定せよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体からなる集合である。

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ x^4 - x^2 + \frac{1}{5} \geqq 0$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面のベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^2$ と書く。$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を平面のベクトルとする。ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が次の条件をみたすとき，$\mathbb{R}^2$ を**生成**するという；

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2\ \exists a_1 \in \mathbb{R}\ \exists a_2 \in \mathbb{R}\ \ \boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$$

(1) 「ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が $\mathbb{R}^2$ を生成しない」という命題を論理記号を用いて表せ。

(2) 次のベクトルの組が $\mathbb{R}^2$ を生成するかどうか調べよ。

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2 以上の任意の自然数 n は素数の積に分解できること，即ち n に対し素数 $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ で $n = p_1p_2\cdots p_\ell$ となるものが存在すること ($\ell = 1$ の場合もあることに注意) を数学的帰納法で証明せよ。素数とは自分自身と 1 以外では割り切れない 2 以上の自然数である。

$\boxed{5}$ 次の連立方程式の解を求めよ。

$$x^3 - x + y = 0 \text{ かつ } y^3 + x - y = 0$$

$\boxed{6}$ 次の問に答えよ。

(1)　集合 A, B が $A \subseteq B$ であることの定義は

$$\forall a \ a \in A \implies a \in B$$

であるがこの否定命題を述べよ。

(2)　$\mathbb{Q}$ を有理数全体からなる集合，$\mathbb{Z}$ を整数全体からなる集合とする。$\mathbb{Z} \supseteq \mathbb{Q}$ が成立する場合は証明し，成立しない場合はそのことを証明せよ。

(3)　$\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ が成立する場合は証明し，成立しない場合はそのことを証明せよ。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{7}}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるとは,

$$\forall x_1, x_2 \in X \;\; x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

が成立することである。写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは,

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X \;\; y = f(x)$$

が成立することである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

(2) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

(3) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ $f : A \longrightarrow B$ を $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 1$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。

(4) 写像 $f : [\,0, \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^3$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体のつくる集合である。

$\boxed{\mathbf{8}}$ 授業についての感想, 数学について思う事などがあれば記せ (10)。