数学序論第 2 回試験

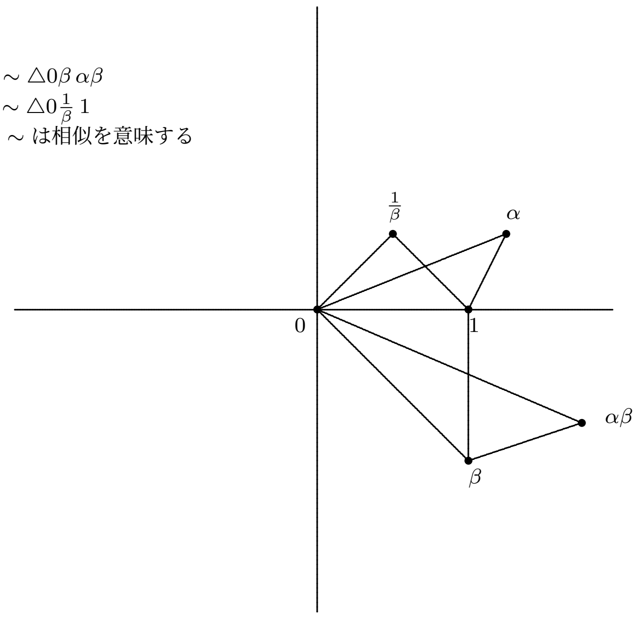
2013–7–12　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 複素平面内に α, β が下図の様に与えられている。次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha\beta$ および $\dfrac{1}{\beta}$ を作図により複素平面に図示し，どの様に作図したか説明せよ。作図はフリーハンドでよいが，どの角とどの角が等しいか等の情報は図に書き入れること。

$\triangle 01\alpha \sim \triangle 0\beta\,\alpha\beta$
$\triangle 01\beta \sim \triangle 0\frac{1}{\beta}\,1$
ここで $\sim$ は相似を意味する



(2)　(1) で用いた $\alpha\beta$ の作図方法が正しい理由を述べよ。

$\alpha = r_a e^{i\theta_a}, \beta = r_b e^{i\theta_b}$ と極形式で表示すると $\alpha\beta = r_a r_b e^{i(\theta_a+\theta_b)}$ である。$\alpha\beta$ が表す点を P，0 が表す点を O，1 が表す点を U としたとき

$$\overline{OP} = r_a r_b, \qquad \angle POU = \theta_a + \theta_b$$

が成立していれば作図が $\alpha\beta$ の点を与えていることが分かる。
α が表す点を A，β が表す点を B とする。$\triangle OUA \sim \triangle OBP$ より $\angle AOU = \angle POB = \theta_a$ となる。よって

$$\angle POU = \angle POB + \angle BOU = \angle AOU + \angle BOU = \theta_a + \theta_b$$

となる。また $\triangle OUA \sim \triangle OBP$ より $\overline{OA} : \overline{OU} = \overline{OP} : \overline{OB}$ となるので $|\alpha| : 1 = \overline{OP} : |\beta|$ が成立し

$$\overline{OP} = |\alpha| \cdot |\beta| = r_a r_b$$

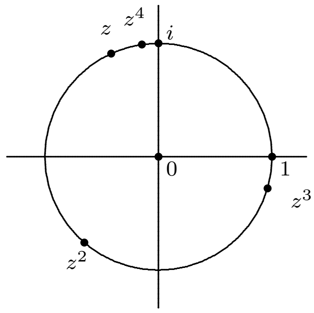
が得られる。ここで $\overline{OA}$ は線分 OA の長さを表す。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

2 $z = e^{2i}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) z,z^2,z^3,z^4 を図示せよ。



(2) 異なる自然数 m, n に対し $z^m \neq z^n$ を示せ。ただし π が有理数でないことは既知としてよい。

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ なので $e^{ix} = 1$ となるのは $x = 2k\pi$ (k は整数) のときであり，かつそのときに限る。
$z^m = z^n$ とすると $z^{(m-n)} = 1$ 即ち

$$e^{i2(m-n)} = 1$$

となる。このときある整数 k が存在して $2(m-n) = 2k\pi$ となる。m と n が異なる自然数とすると $k \neq 0$ である。このとき $\pi = \dfrac{m-n}{k}$ より π が有理数となり矛盾。よって異なる自然数 m, n に対しては $z^m \neq z^n$ である。

3 三角関数の加法定理

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \qquad \cos(x+y) = cosx \cos y - \sin x \sin y$$

および指数関数の指数法則

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

は知られているとする。これらを用いて次を示せ。このとき関係式

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

を用いてもよいし，用いなくてもよい。

(1) $\sin 2x$ を $\cos x$ と $\sin x$ を用いて表せ。

$$\begin{aligned}\cos 2x + i \sin 2x = e^{i2x} &= \left(e^{ix}\right)^2 = (\cos x + i \sin x)^2 \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x + 2i \cos x \sin x\end{aligned}$$

よって

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

(2) $\sin 3x$ を $\cos x$ と $\sin x$ を用いて表せ。

$$\begin{aligned}\cos 3x + i \sin 3x = e^{i3x} &= \left(e^{ix}\right)^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3\cos^2 x i \sin x + 3 \cos x (i \sin x)^2 + (i \sin x)^3 \\ &= \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + i \left(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x\right)\end{aligned}$$

よって

$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ を用いて $-4\sin^3 x + 3 \sin x$ としてもよい。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 複素数 $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対し絶対値 $|z|$ とは

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

で定義された。複素数 $\alpha = \sqrt{6} e^{\frac{i\pi}{12}} = \sqrt{6} \exp\left(\frac{i\pi}{12}\right), \beta = 2 + 2i$ に対し $|\alpha\beta|$ を求めよ。

$\beta = 2 + 2i$ なので $|\beta| = 2\sqrt{2}$ である。また $|\alpha| = |\sqrt{6}| \cdot |e^{i\frac{\pi}{12}}| = \sqrt{6}$ なので

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta| = \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 対数に関する命題

$$\log_a p^x = x \log_a p$$

を証明せよ。ただし対数関数 $y = \log_a x$ が指数関数の逆関数であること，即ち $y = \log_a x \iff x = a^y$，および指数法則のみ用いて示すこと。

$q = \log_a p$ とおくと $p = a^q$ である。両辺を x 乗すると

$$p^x = (a^q)^x = a^{qx}$$

となる。これを再度対数に直すと

$$qx = \log_a p^x$$

となる。よって

$$x \log_a p = \log_a p^x$$

が成立する。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の式を証明せよ。

(1)

$$\arccos\frac{4}{5} = \arcsin\frac{3}{5}$$

$\arccos\dfrac{4}{5} = \alpha$ とおくと $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ $(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$ となる。このとき $\sin\alpha \geqq 0$ である。

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

より $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ となる。

$\cos\alpha \geqq 0$ より $0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\alpha = \arcsin\dfrac{3}{5}$ となり，式が証明される。

(2)

$$\arctan x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$u = \arctan x$ とおくと $x = \tan u$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であり，$v = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sin v$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq v \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ となる。

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 u = 1 + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{\cos^2 u}{\cos^2 u} + \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$$

であるが，$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos u > 0$ なので $\sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{\cos u}$ となる。

$$\sin v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos u \tan u = \sin u$$

であり，$-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq v \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $u = v$ となる。