数学序論第3回試験

2013–8–1　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 関数 $y = f(x) = e^x$ の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし，極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$ は使用してよい。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x \end{aligned}$$

2 関数 $y = f(x) = e^{x^2}\log\left(x^3+x\right)$ の導関数を求めよ。ただし $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$，$(e^x)' = e^x$ 等の諸公式を用いてよい。

$$\begin{aligned} y' &= \left(e^{x^2}\log\left(x^3+x\right)\right)' = \left(e^{x^2}\right)'\log\left(x^3+x\right) + e^{x^2}\left(\log\left(x^3+x\right)\right)' \\ &= 2xe^{x^2}\log\left(x^3+x\right) + e^{x^2}\frac{3x^2+1}{x^3+x} \end{aligned}$$

3 関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で極大であるとは，x が a の近くにあり，$x \neq a$ のとき $f(x) < f(a)$ が成立することをいう。微分可能な関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で極大のとき $f'(a) = 0$ であることを示せ。

極大なので小さい $h \neq 0$ に対し $f(a+h) - f(a) < 0$ が成立している。$h > 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0$ なので $f'_+(a) = \displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leqq 0$ が成立する。$h < 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0$ なので $f'_-(a) = \displaystyle\lim_{h\to -0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqq 0$ が成立する。

$$0 \leqq f'_-(a) = f'(a) = f'_+(a) \leqq 0$$

より $f'(a) = 0$ を得る。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

4 関数 $y = f(x) = x^4 \log x$ に対しグラフの増減表を書き，増減・極点・凹凸・変曲点を調べ，概形を描け。

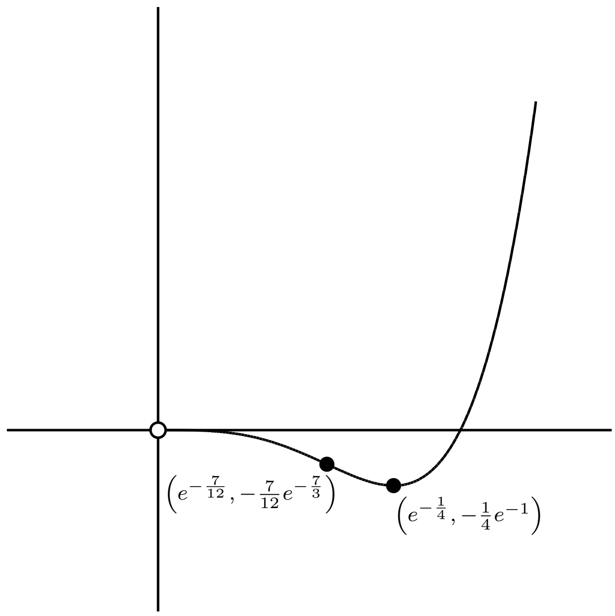
$\log x$ が定義されるのは $x > 0$ なので $f(x)$ の定義域も $x > 0$ である。$f'(x) = 4x^3 \log x + x^4 \dfrac{1}{x} = 4x^3 \log x + x^3$ となる。$f'(x) = 0$ を解いて，$x = e^{-\frac{1}{4}}$ を得る。$f''(x) = 12x^2 \log x + 4x^3 \dfrac{1}{x} + 3x^2 = 12x^2 \log x + 7x^2$ となる。$f''(x) = 0$ を解いて，$x = e^{-\frac{7}{12}}$ を得る。$f'(x), f''(x)$ の正負を調べると増減表は次の様になる。

x		$e^{-\frac{7}{12}}$		$e^{-\frac{1}{4}}$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{7}{12}e^{-\frac{7}{3}}$	↘	$-\frac{1}{4}e^{-1}$	↗

極点は $\left(e^{-\frac{1}{4}}, -\dfrac{1}{4}e^{-1}\right)$ であり，ここで減少から増加に変わる。変曲点は $\left(e^{-\frac{7}{12}}, -\dfrac{7}{12}e^{-\frac{7}{3}}\right)$ であり，ここで上に凸から下に凸に変わる。グラフを書くために，$x \to +0$ としたときの関数の挙動を調べる。

$$\lim_{x\to+0} x^4 \log x = \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to+0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^4}\right)'}$$
$$= \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{4}{x^5}} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to+0} x^4 = 0$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ であり，また $f(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のときのみである。このことに注意してグラフを描くと次図の様になる。



$\boxed{\mathbf{5}}$ 次のようにパラメーター表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = t^3 - t^2, \qquad y = y(t) = 2t^3 - t$$

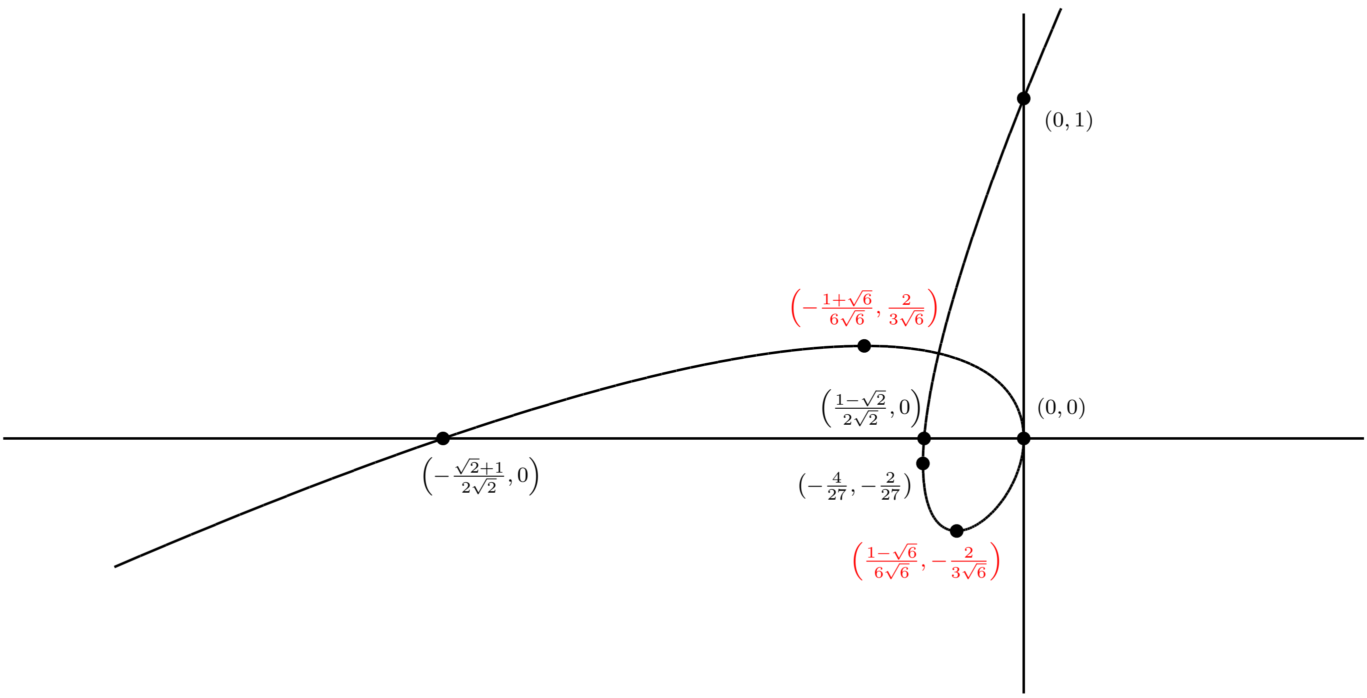
$x'(t) = 3t^2 - 2t$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = 0, \dfrac{2}{3}$ を得る。$y'(t) = 6t^2 - 1$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{2}{3}$	
x'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$		$\rightarrow$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
曲線	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right), y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) = \left(-\dfrac{1+\sqrt{6}}{6\sqrt{6}}, +\dfrac{2}{3\sqrt{6}}\right)$, $(x(0), y(0)) = (0, 0)$, $\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right), y\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\right) = \left(\dfrac{1-\sqrt{6}}{6\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{3\sqrt{6}}\right)$, $\left(x\left(\dfrac{2}{3}\right), y\left(\dfrac{2}{3}\right)\right) = \left(-\dfrac{4}{27}, -\dfrac{2}{27}\right)$ である。

$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, 1$ を得る。$(x(1), y(1)) = (0, 1)$ である。

$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。$\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}, 0\right)$, $\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(\dfrac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, 0\right)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

6 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$ を求めよ。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x\cos x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

7 不定積分

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^{101}}\,dx$$

を求めよ。どのような方法 (置換積分，部分積分等) で解いたか分かるように計算過程もきちんと書くこと。

$t = 1 + x^3$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = 3x^2$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1+x^3)^{101}}\,dx &= \int \frac{x^2}{t^{101}}\frac{1}{3x^2}\,dt = \frac{1}{3}\int t^{-101}\,dt\\ &= -\frac{1}{3}\frac{1}{100}t^{-100} = -\frac{1}{300}\frac{1}{(1+x^3)^{100}}\end{aligned}$$

8 不定積分

$$\int x\log x\,dx$$

を求めよ。どのような方法 (置換積分，部分積分等) で解いたか分かるように計算過程もきちんと書くこと。

$$\begin{aligned}\int x\log x\,dx &= \int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\log x\,dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2\,(\log x)'\,dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \int\frac{1}{2}x\,dx\\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2\end{aligned}$$

9 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。