数学序論第 1 回試験

2014–6–6　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 P, Q を命題とする。$\neg P$，$P \wedge Q$，$P \vee Q$，$P \implies Q$ の真理表は下のようになっている。$P \implies \neg Q$ と $\neg Q \implies P$ が同値であるかどうかを真理表を用いて調べよ。(10)

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

$P \implies \neg Q$，$\neg Q \implies P$ の真理表を書くと下記のようになる。

P	Q	$\neg Q$	$P \implies \neg Q$	$\neg Q \implies P$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	F

$P \implies \neg Q$ と $\neg Q \implies P$ は対応する欄の真理値が同じではないので同値でない。

2 n が自然数のとき $n(n^4-1)$ が 5 で割り切れることを数学的帰納法で証明せよ。

「$n(n^4-1)$ が 5 で割り切れる」という命題を $P(n)$ とする。
$n=1$ のとき $1(1^4-1)=0$ なので 5 で割り切れる。
$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $k(k^4-1)$ は 5 で割り切れるとする。このときある整数 N が存在して $k(k^4-1)=5N$ となっている。

$$\begin{aligned}(k+1)\left((k+1)^4-1\right)-k(k^4-1) &= k^5+5k^4+10k^3+10k^2+4k-(k^5-k)\\ &= 5k^4+10k^3+10k^2+5k\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}(k+1)\left((k+1)^4-1\right) &= \left((k+1)\left((k+1)^4-1\right)-k(k^4-1)\right)+k(k^4-1)\\ &= 5(k^4+2k^3+2k^2+k)+5N\\ &= 5(k^4+2k^3+2k^2+k+N)\end{aligned}$$

となるので，$(k+1)\left((k+1)^4-1\right)$ も 5 で割り切れる。$n=k+1$ のときも成立するので，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して $P(n)$ が成立する。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 空間のベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^3$ と書く。$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ を空間のベクトルとする。ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が次の条件をみたすとき，$\mathbb{R}^3$ を**生成**するという；

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\ \exists a, b, c \in \mathbb{R}\ \ \boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 + c\boldsymbol{x}_3$$

(1) 「ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が $\mathbb{R}^3$ を生成しない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}\ \ \boldsymbol{x} \neq a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 + c\boldsymbol{x}_3$$

(2) 次のベクトルの組が $\mathbb{R}^3$ を生成するかどうか調べよ。

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が $\mathbb{R}^3$ を生成すると仮定する。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して，実数 a, b, c が存在して

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。このとき $1 = a0 + b1 + c1$ および $0 = a0 + b1 + c1$ が成立するので

$$1 = a0 + b1 + c1 = 0$$

となり $1 = 0$ が得られるので矛盾。よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は $\mathbb{R}^3$ を生成しない。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の連立方程式の解を求めよ。

$$x(1-x^2-3y^2)=0 \text{ かつ } y(1-3x^2-y^2)=0$$

$$x(1-x^2-3y^2)=0 \iff x=0 \vee 1-x^2-3y^2=0$$

$$y(1-3x^2-y^2)=0 \iff y=0 \vee 1-3x^2-y^2=0$$

より条件は (a)$x=0$ かつ $y=0$, (b)$x=0$ かつ $1-3x^2-y^2=0$, (c)$1-x^2-3y^2=0$ かつ $y=0$, (d)$1-x^2-3y^2=0$ かつ $1-3x^2-y^2=0$ の 4 つの場合に分けられる。
(a) の場合は $(x,y)=(0,0)$ である。
(b) の場合，$x=0$ を代入すると $1-y^2=0$ より $y=\pm1$ となる。
(c) の場合 $y=0$ を代入すると $1-x^2=0$ より $x=\pm1$ となる。
(d) の場合 $1-x^2-3y^2=1-3x^2-y^2$ より $x^2=y^2$ を得る。これを元の式に代入すると

$$1-4x^2=0$$

よって $x=\pm\dfrac{1}{2}$ であり，y も同様に計算できて $y=\pm\dfrac{1}{2}$ となる。
以上により

$$(x,y)=(0,0),(0,\pm1),(\pm1,0),(\pm\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\pm\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問に答えよ。

(1) 集合 A,B が $A\subseteq B$ であることの定義は

$$\forall a \ \ a\in A \implies a\in B$$

であるがこの否定命題を述べよ。

$$\exists a \quad a\in A \wedge a\notin B$$

(2) $\mathbb{R}$ を実数全体からなる集合，$\mathbb{C}$ を複素数全体からなる集合とする。$\mathbb{R}\supseteq\mathbb{C}$ が成立しないことを証明せよ。

虚数単位 i を考えると $i\in\mathbb{C}$ であるが，$i\notin\mathbb{R}$ である。よって $\mathbb{R}\supseteq\mathbb{C}$ は成立しない。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{6}}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるとは,

$$\forall x_1, x_2 \in X \ \ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

が成立することである。写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは,

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \ \ y = f(x)$$

が成立することである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists x_1, x_2 \in X \ \ x_1 \neq x_2 \land f(x_1) = f(x_2)$$

(2) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists y \in Y \ \forall x \in X \ \ y \neq f(x)$$

(3) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ $f : A \longrightarrow B$ を $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。

$x_1 \neq x_2$ のとき $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成立しているので f は単射である。また $y = 1$ に対して $x = 2$ とすれば $y = f(x)$ を満たす。同様に $y = 2$ のときは $x = 1$, $y = 3$ のときは $x = 3$ とすれば $y = f(x)$ となる x が存在する。よって f は全射である。以上により f は全単射である。

(4) 写像 $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ を $f(x) = \sin x$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体のつくる集合である。

$0 \neq 2\pi$ であるが $f(0) = \sin 0 = 0 = \sin 2\pi = f(2\pi)$ となるので f は単射でない。よって f は全単射でない。

$\boxed{\mathbf{7}}$ 授業についての感想, 数学について思う事などがあれば記せ (5)。