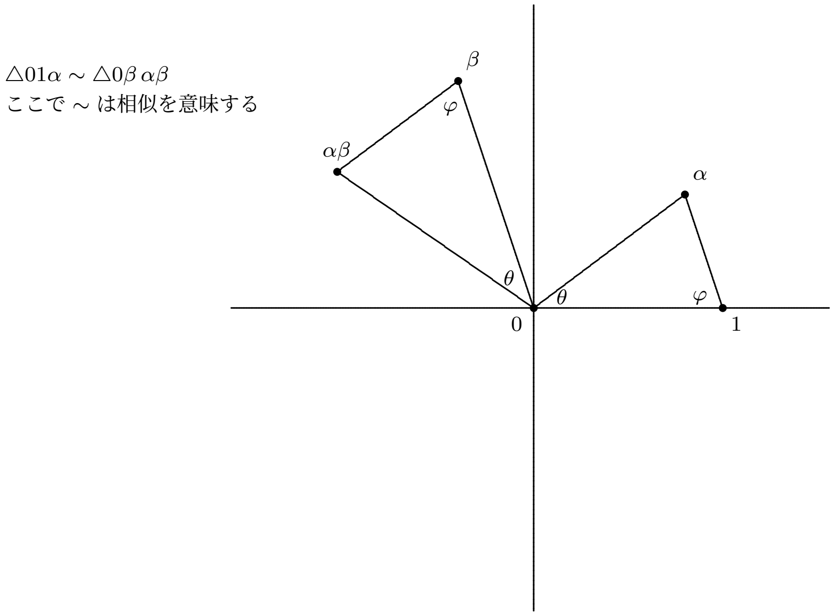
数学序論第 2 回試験

2014–7–4　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 複素平面内に α, β が下図の様に与えられている。次の問いに答えよ。

(1) $\alpha\beta$ を作図により複素平面に図示し，どの様に作図したか説明せよ。作図はフリーハンドでよいが，どの角とどの角が等しいか等の情報は図に書き入れること。



(2) (1) で用いた $\alpha\beta$ の作図方法が正しい理由を述べよ。

$\alpha = r_a e^{i\theta_a}, \beta = r_b e^{i\theta_b}$ と極形式で表示すると $\alpha\beta = r_a r_b e^{i(\theta_a+\theta_b)}$ である。$\alpha\beta$ が表す点を P，0 が表す点を O，1 が表す点を U としたとき

$$\overline{OP} = r_a r_b, \qquad \angle UOP = \theta_a + \theta_b$$

が成立していれば作図が $\alpha\beta$ の点を与えていることが分かる。
α が表す点を A，β が表す点を B とする。$\triangle OUA \sim \triangle OBP$ より $\angle AOU = \angle BOP = \theta_a$ となる。よって

$$\angle UOP = \angle UOB + \angle BOP = \angle BOU + \angle UOA = \theta_a + \theta_b$$

となる。また $\triangle OUA \sim \triangle OBP$ より $\overline{OA} : \overline{OU} = \overline{OP} : \overline{OB}$ となるので $|\alpha| : 1 = \overline{OP} : |\beta|$ が成立し

$$\overline{OP} = |\alpha| \cdot |\beta| = r_a r_b$$

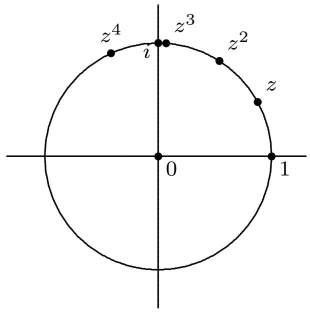
が得られる。ここで $\overline{OA}$ は線分 OA の長さを表す。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{2}$ 次の問に答えよ。

(1) $z = e^{i\frac{1}{2}} = \exp\left(i\frac{1}{2}\right)$ とする。z, z^2, z^3, z^4 を図示せよ。



(2) n を自然数とし，$z = e^{i\frac{1}{n}} = \exp\left(i\dfrac{1}{n}\right)$ とする。z は第 1 象限にある。すなわち $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とするとき $a > 0, b > 0$ である。z^2, z^3 も第 1 象限にあるとする。$z^4, z^5, \ldots$ と順に次々に計算して行ったとき，z^{29} までは第 1 象限にあり，z^{30} で初めて第 2 象限となった。n を求めよ。ただし $\pi = 3.14$ とする。

$z^{29} = \exp\left(i\dfrac{29}{n}\right)$ が第 1 象限にあり，$z^{30} = \exp\left(i\dfrac{30}{n}\right)$ が第 2 象限にあることより

$$\frac{29}{n} < \frac{\pi}{2} < \frac{30}{n}$$

これより

$$18.471 = \frac{58}{\pi} < n < \frac{60}{\pi} = 19.108$$

となり，n は自然数なので $n = 19$ である。

$\boxed{3}$ オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

および指数法則

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$$

から正弦関数 (sin) の加法定理を導け。

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy} = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x\cos y - \sin x \sin y + i(\sin x\cos y + \cos x \sin y)\end{aligned}$$

虚部を比較することにより正弦関数の加法定理

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$$

を得る。

4 複素数 $z = 1 + i$ とする。z^{2014} を計算せよ。ただし 2^p 等はそのままの形でよい。

極形式で表すと $z = \sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)$ となるので

$$\begin{aligned} z^{2014} &= \left(\sqrt{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2014} = \left(\sqrt{2}\right)^{2014}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)^{2014} \\ &= \left(\left(\sqrt{2}\right)^{2}\right)^{1007}\exp\left(i\frac{2014\pi}{4}\right) = 2^{1007}\exp\left(i\frac{1007\pi}{2}\right) \\ &= 2^{1007}\exp\left(i\frac{3\pi}{2}\right) = -2^{1007}i \end{aligned}$$

5 a を実数とする。n を自然数とするとき a^n を次の様に定義する。

(1) $a^1 = a$

(2) 自然数 k に対して a^k が定義されているとき

$$a^{k+1} = a^k a$$

と定義する。
このとき自然数 m, n に対して指数法則

$$a^{m+n} = a^m a^n$$

が成立することを n に関する帰納法を用いて証明せよ。

$n = 1$ のとき定義より

$$a^{m+1} = a^m a = a^m a^1$$

となり成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $a^{m+k} = a^m a^k$ の成立を仮定する。

$$a^{m+(k+1)} = a^{(m+k)+1} = a^{m+k}a = \left(a^m a^k\right)a = a^m\left(a^k a\right) = a^m a^{k+1}$$

となり $n = k + 1$ のときも成立する。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の式を証明せよ。

$$\arcsin\frac{7}{25}+\arcsin\frac{5}{13}=\arcsin\frac{204}{325}$$

$x=\arcsin\dfrac{7}{25}, y=\arcsin\dfrac{5}{13}$ とおくと

$$\sin x=\frac{7}{25}\quad\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right),\qquad \sin y=\frac{5}{13}\quad\left(-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$$

が成立している。

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\left(\frac{7}{25}\right)^2=\left(\frac{24}{25}\right)^2$$

であり，$-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos x\ge 0$ なので $\cos x=\dfrac{24}{25}$ となる。

$$\cos^2 y=1-\sin^2 y=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\left(\frac{12}{13}\right)^2$$

であり，$-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos y\ge 0$ なので $\cos y=\dfrac{12}{13}$ となる。

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y=\frac{7}{25}\frac{12}{13}+\frac{24}{25}\frac{5}{13}=\frac{204}{325}$$

$-\dfrac{\pi}{2}\le x,y\le\dfrac{\pi}{2}$ より

$$-\pi\le x+y\le\pi$$

を得るが

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y=\frac{24}{25}\frac{12}{13}-\frac{7}{25}\frac{5}{13}=\frac{253}{325}\ge 0$$

より $-\dfrac{\pi}{2}\le x+y\le\dfrac{\pi}{2}$ となる。よって

$$x+y=\arcsin\frac{204}{325}$$

となる。

$\boxed{\mathbf{7}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。