

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に、数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。

・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては白紙答案より低い点数になる場合がある。careless miss でそのような事はないが、「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。

・在籍番号欄について：2年生以上は10桁の在籍番号を書く事。1年生は出席番号(多くは2桁)でよい。

1 関数  $y = f(x) = \log x$  の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし、極限  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$  は使用してよい。

$k = \log(x+h) - \log x$  とおく。

$$k = \log(x+h) - \log x = \log \frac{x+h}{x}$$

より  $e^k = \frac{x+h}{x}$  となる。これより  $h = x(e^k - 1)$  を得る。 $h \rightarrow 0$  のとき  $k \rightarrow 0$  である。逆に  $k \rightarrow 0$  のとき  $h \rightarrow 0$  である。よって

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{x(e^k - 1)} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{e^k - 1} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

2 関数  $y = f(x) = x \log \left( \frac{\log x}{x} \right)$  の導関数を求めよ。ただし  $(\log x)' = \frac{1}{x}$  等の諸公式を用いてよい。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log \left( \frac{\log x}{x} \right) + x \frac{x}{\log x} \frac{1 - \log x}{x^2} \\ &= \log \left( \frac{\log x}{x} \right) + \frac{1 - \log x}{\log x} \end{aligned}$$

3  $f(x)$  の不定積分  $F(x) = \int f(x) dx$  は  $\frac{dF}{dx} = f(x)$  をみたす関数として定義される。 $x = \varphi(t)$  とするとき次が成立することを示せ。

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = \frac{dF(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = f(x)\varphi'(t)$$

より

$$\int f(x) dx = F(x) = F(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

となる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学		在番		氏	
籍		籍号		名	

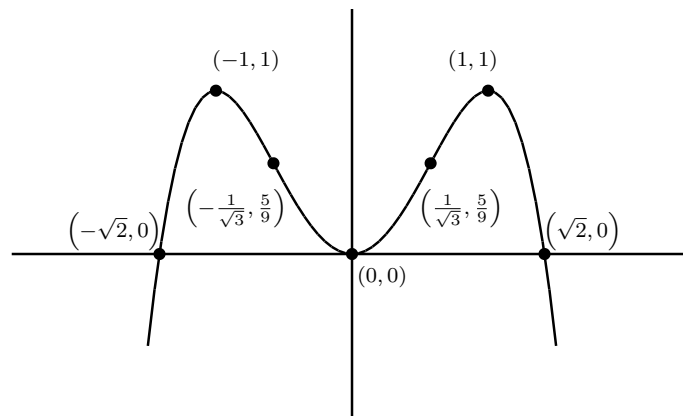
4 関数  $y = f(x) = 2x^2 - x^4$  に対しグラフの増減表を書き、増減・極点・凹凸・変曲点を調べ、概形を描け。

$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2) = 4x(1 - x)(1 + x)$  なので  $f'(x) = 0$  となるのは  $x = -1, 0, 1$  である。 $f''(x) = 4 - 12x^2 = 4(1 - 3x^2)$  なので  $f''(x) = 0$  となるのは  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  である。導関数、2次導関数の正負を調べると次の様になっている。

$x$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	↗	1	↘	$\frac{5}{9}$	↘	0	↗	$\frac{5}{9}$	↗	1	↘

関数は  $x \leq -1, 0 \leq x \leq 1$  で増加， $-1 \leq x \leq 0, 1 \leq x$  で減少の状態にある。また  $x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \leq x$  で上に凸， $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  で下に凸である。

$f(x) = 2x^2 - x^4 = 0$  を解くと  $x = 0, \pm\sqrt{2}$  となる。よって曲線は  $x$  軸と3点で交わっている。 $(x = 0$  は重解なので接している。) このことに注意して概形を描くと次図の様になる。



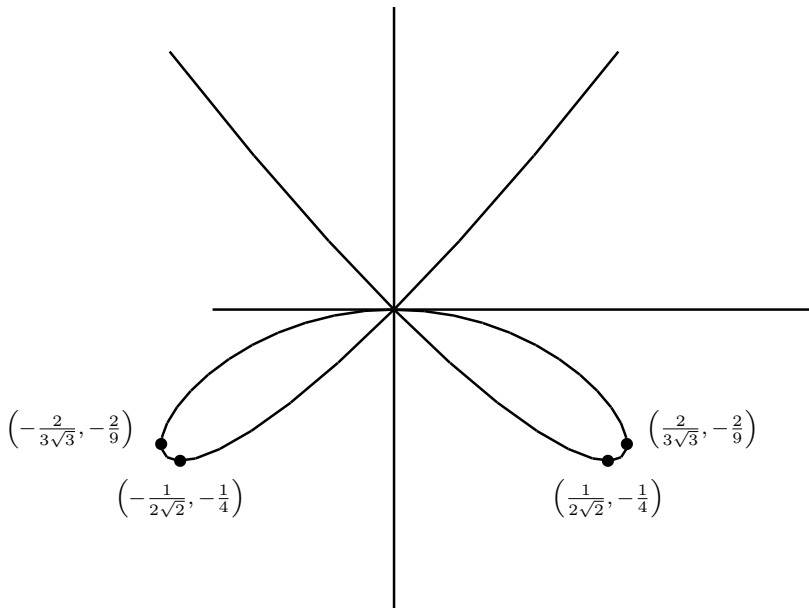
5 次のようにパラメーター表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = t^3 - t, \quad y = y(t) = t^4 - t^2$$

$x'(t) = 3t^2 - 1$  なので  $x'(t) = 0$  を解いて  $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  を得る。 $y'(t) = 4t^3 - 2t$  なので  $y'(t) = 0$  を解いて  $t = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  を得る。 $x'(t), y'(t)$  の正負を調べるために、途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

$t$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$0$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$x'$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$x$	→	→	→	←	←	←	→	→	→	→	→
$y'$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$y$	↓		↑	↑	↑		↓	↓	↓		↑
曲線	↘	→	↗	↑	↖	←	↙	↓	↘	→	↗

$x'(t) = 0$  および  $y'(t) = 0$  となる点は  $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right), \left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, -\frac{2}{9}\right),$   
 $(x(0), y(0)) = (0, 0), \left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, -\frac{2}{9}\right), \left(x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right)$  である。  
 $x(t) = 0$  を解くと  $t = 0, \pm 1$  を得る。 $(x(0), y(0)) = (0, 0), (x(1), y(1)) = (0, 0), (x(-1), y(-1)) = (0, 0)$  なので  $y$  軸との交点は  $(0, 0)$  である。  
 $y(t) = 0$  を解くと  $t = 0, \pm 1$  を得る。 $x$  軸との交点は  $(0, 0)$  である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学 科		在 番 籍 号		氏 名	
--------	--	------------------	--	--------	--

6  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$  のとき極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos(\alpha x)}{\log \cos(\beta x)}$  を求めよ。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos(\alpha x)}{\log \cos(\beta x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\log \cos(\alpha x))'}{(\log \cos(\beta x))'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos(\alpha x)} \cdot (-\sin(\alpha x)) \cdot \alpha}{\frac{1}{\cos(\beta x)} \cdot (-\sin(\beta x)) \cdot \beta} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\alpha x)} \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\beta x)}{\cos(\alpha x)} \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \cdot \frac{\beta x}{\sin(\beta x)} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \\ &= \frac{\alpha^2}{\beta^2} \end{aligned}$$

7 不定積分

$$\int (x^2 + x)(2x^3 + 3x^2 + 1)^{104} dx$$

を求めよ。どのような方法 (置換積分, 部分積分等) で解いたか分かるように計算過程もきちんとして書くこと。

$t = 2x^3 + 3x^2 + 1$  とおくと  $\frac{dt}{dx} = 6x^2 + 6x$  より  $dx = \frac{1}{6(x^2 + x)} dt$  である。

$$\begin{aligned} \int (x^2 + x)(2x^3 + 3x^2 + 1)^{104} dx &= \int (x^2 + x)t^{104} \frac{1}{6(x^2 + x)} dt = \frac{1}{6} \int t^{104} dt \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{105} t^{105} = \frac{1}{630} (2x^3 + 3x^2 + 1)^{105} \end{aligned}$$

8 不定積分

$$\int x \sin x dx$$

を求めよ。どのような方法 (置換積分, 部分積分等) で解いたか分かるように計算過程もきちんとして書くこと。

$f = x, g' = \sin x$  とおくと  $g = -\cos x$  である。

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \int f g' dx = f g - \int f' g dx = -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x \end{aligned}$$

9 授業についての感想, 数学について思う事などがあれば記せ (5)。