# 数学序論第１回試験

2015–6–5　　河野

**注意**：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

**1** $P, Q$ を命題とする。$\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \implies Q$ の真理値表は下のようになっている。$(P \implies Q) \implies Q$ と $P \implies (P \implies Q)$ が同値であるかどうかを真理値表を用いて調べよ。

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \implies Q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F |
| F | T | F | T | T |
| F | F | F | F | T |

$(P \implies Q) \implies Q$ と $P \implies (P \implies Q)$ 真理値表は次である。

| $P$ | $Q$ | $P \implies Q$ | $(P \implies Q) \implies Q$ | $P \implies (P \implies Q)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | F |
| F | T | T | T | T |
| F | F | T | F | T |

$(P \implies Q) \implies Q$ と $P \implies (P \implies Q)$ は対応する欄の真理値が同じではないので同値でない。

**2** $n$ が自然数のとき $h \geq 0$ ならば $(1+h)^n \geq 1 + nh$ であることを数学的帰納法で証明せよ。

証明すべき命題を $P(n)$ とおく。
(A) $P(1)$ は $(1+h)^1 \geq 1 + 1 \cdot h$ なので成立している。
(B) $P(k)$ の成立を仮定する。すなわち $(1+h)^k \geq 1 + kh$ の成立を仮定する。

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1} &= (1+h)^k(1+h) \geq (1+kh)(1+h) \\ &= 1 + (k+1)h + kh^2 \geq 1 + (k+1)h\end{aligned}$$

となる。よって $P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 $n$ に対し $P(n)$ が成立する。

**裏にも問題あり。別紙にも問題あり**

| 学科 | | 在籍番号 | | 氏名 | |
|---|---|---|---|---|---|

$\boxed{\mathbf{3}}$ 空間のベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^3$ と書く。$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ を空間のベクトルとする。ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が次の条件をみたすとき，$\mathbb{R}^3$ を**生成**するという；

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\ \exists a, b, c \in \mathbb{R}\ \ \boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 + c\boldsymbol{x}_3$$

**(1)**　「ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が $\mathbb{R}^3$ を生成しない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad \boldsymbol{x} \neq a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 + c\boldsymbol{x}_3$$

**(2)**　次のベクトルの組が $\mathbb{R}^3$ を生成するかどうか調べよ。

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここでは解析の過程は書いてない。各自試みること。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^3$ の任意のベクトルとする。$a = x - 2y + z, b = \dfrac{2z - y}{4}, c = \dfrac{3y - 2z}{4}$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 + c\boldsymbol{x}_3 &= (x - 2y + z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2z - y}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3y - 2z}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2z - y \\ 4z - 2y \\ 6z - 3y \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9y - 6z \\ 6y - 4z \\ 3y - 2z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x - 2y + z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は $\mathbb{R}^3$ を生成する。

**4** 次の連立方程式の解を求めよ。

$$x^3 - x + y = 0 \text{ かつ } y^3 + x - y = 0$$

$x^3 - x + y = 0$ を **1 式**, $y^3 + x - y = 0$ を **2 式**とする。1 式と 2 式を加えると $x^3 + y^3 = 0$ を得る。$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$ なので

$$x^3 + y^3 = 0 \iff (x + y = 0 \ \lor \ x^2 - xy + y^2 = 0)$$

が成立している。

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

なので

$$x^2 - xy + y^2 = 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}y = 0 \ \land \ y = 0\right) \iff (x = 0 \ \land \ y = 0)$$

となる。よって

$$(x + y = 0 \ \lor \ x^2 - xy + y^2 = 0) \iff (x + y = 0 \ \lor \ (x, y) = (0, 0)) \iff x + y = 0$$

が成立するので

$$x^3 + y^3 = 0 \iff x + y = 0$$

が分かる。式 $x + y = 0$ を **3 式**とすると

$$1 \text{ 式} \land 2 \text{ 式} \iff 1 \text{ 式} \land 3 \text{ 式}$$

が成立する。よって 1 式と 3 式からなる連立方程式を解けばよいことが分かる。3 式を 1 式に代入することにより $x^3 - 2x = 0$ が得られる。$x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$ なので $x = 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ となる。
これらの解を最初の式に代入すると式は成立する。よって解は $(x, y) = (0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ である。

**5** $a, b$ を与えられた実数とする。次の命題の否定命題をつくれ。またこの命題の意味を考えることにより，$a, b$ がどのような関係にあるとき真になるか考察せよ。

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a \leq x \implies b < x$$

命題「$\forall x \in \mathbb{R} \ \ a \leq x \implies b < x$」を $P$ とする。否定命題 $\neg P$ は

$$\exists x \in \mathbb{R} \ \ a \leq x \land x \leq b$$

である。
「 $a \leq b$ 」という命題を $P_1$ とおくと

$$\neg P \implies P_1$$

が成立している。
このときこの逆，即ち

$$P_1 \implies \neg P$$

が成立する。なぜなら $P_1$ が正しいとき $x = \dfrac{a+b}{2}$ とおくと $x$ は $a \leq x \leq b$ をみたす。よって $\neg P$ が成立し，$P_1 \implies \neg P$ は真である。
よって $\neg P$ と $P_1$ は同値であることが分かる。即ち

$$P_1 \quad \equiv \quad \neg P$$

が成立する。同値な命題の否定命題は同値なので

$$\neg P_1 \quad \equiv \quad P$$

が成立する。以上によりもとの命題 $P$ は「 $a \leq b$ 」の否定，即ち「 $a > b$ 」と同値であることが分かる。
$P$ は $a > b$ のとき真，$a \leq b$ のとき偽であることが示された。

**裏にも問題あり。別紙にも問題あり**

| 学科 | | 在籍番号 | | 氏名 | |
|---|---|---|---|---|---|

$\boxed{\textbf{6}}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるとは,

$$\forall x_1, x_2 \in X \;\; x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

が成立することである。写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは,

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X \;\; y = f(x)$$

が成立することである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

(2) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists y \in Y \; \forall x \in X \quad y \neq f(x)$$

(3) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ $f : A \longrightarrow B$ を $f(1) = 3, f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 3$ で定義する。このとき $f$ が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。

$1 \neq 4$ であるが $f(1) = 3 = f(4)$ なので $f$ は単射でない。よって全単射でもない。

(4) 写像 $f : [\,0, \infty\,) \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^4$ で定義する。このとき $f$ が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体のつくる集合である。

$y = -1 \in \mathbb{R}$ とする。任意の $x \in [\,0, \infty\,)$ に対し $f(x) = x^4 \geq 0$ なので $f(x) \neq y$ である。$f$ は全射でない。よって全単射でもない。

$\boxed{\textbf{7}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (5)。