

- 注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に、数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
 ・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては白紙答案より低い点数になる場合がある。careless miss でそのような事はないが、「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
 ・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
 ・在籍番号欄について：2年生以上は10桁の在籍番号を書く事。1年生は出席番号(多くは2桁)でよい。

1 関数 $y = f(x) = \sin x$ の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし、極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ は使用してよい。

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} = \sin x \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} + \cos x \frac{\sin h}{h} \\ &= -\frac{\sin x}{\cos h + 1} \frac{\sin^2 h}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

より

$$(\sin x)' = \cos x$$

2 関数 $y = f(x) = e^{x^4+x^2} \sin(x^5+x^3)$ の導関数を求めよ。ただし $(e^x)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$ 等の諸公式を用いてよい。

$$f'(x) = (4x^3 + 2x)e^{x^4+x^2} \sin(x^5+x^3) + (5x^4 + 3x^2)e^{x^4+x^2} \cos(x^5+x^3)$$

3 $f(x)$ の不定積分 $F(x) = \int f(x) dx$ は $\frac{dF}{dx} = f(x)$ をみたす関数として定義される。部分積分法

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

を証明せよ。

$\int f'(x) dx = f(x)$ なので $(fg)' = f'g + fg'$ の両辺を積分すると

$$fg = \int f'g dx + \int fg' dx$$




が得られ、これを移項して与式が得られる。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学		在		氏	
科		籍		名	
		号			

4 関数 $y = f(x) = x^2 \log x$ に対しグラフの増減表を書き、増減・極点・凹凸・変曲点を調べ、概形を描け。

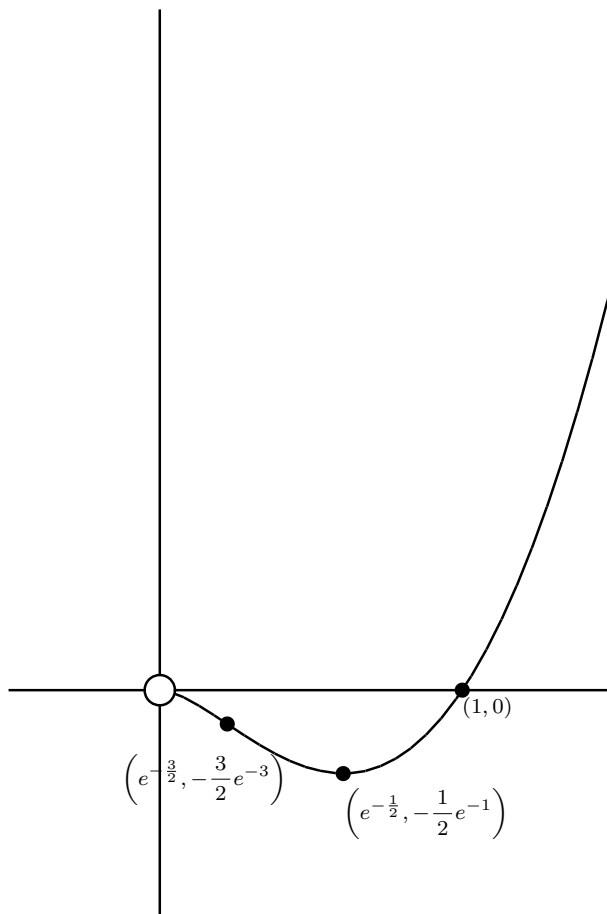
$\log x$ が定義されるのは $x > 0$ なので $f(x)$ の定義域も $x > 0$ である。 $f'(x) = (x^2)' \log x + x^2 (\log x)' = 2x \log x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \log x + x$, $f''(x) = 2 \log x + 3$ となる。 $f'(x) = 0$ を解いて $x = e^{-\frac{1}{2}}$ を得る。また $f''(x) = 0$ を解いて $x = e^{-\frac{3}{2}}$ を得る。間の正負を調べることにより、増減表は次の様になることが分かる。

x		$e^{-\frac{3}{2}}$		$e^{-\frac{1}{2}}$	
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$		$-\frac{3}{2}e^{-3}$		$-\frac{1}{2}e^{-1}$	

よって変曲点は $(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}e^{-3})$ であり、区間 $(0, e^{-\frac{3}{2}})$ で上に凸、区間 $(e^{-\frac{3}{2}}, \infty)$ で下に凸になる。

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-2\frac{1}{x^3}} = -\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2}{2} = 0$$

であり、 $f(x) = 0$ の解が $x = 1$ であることに注意するとグラフの概形は下のようになる。



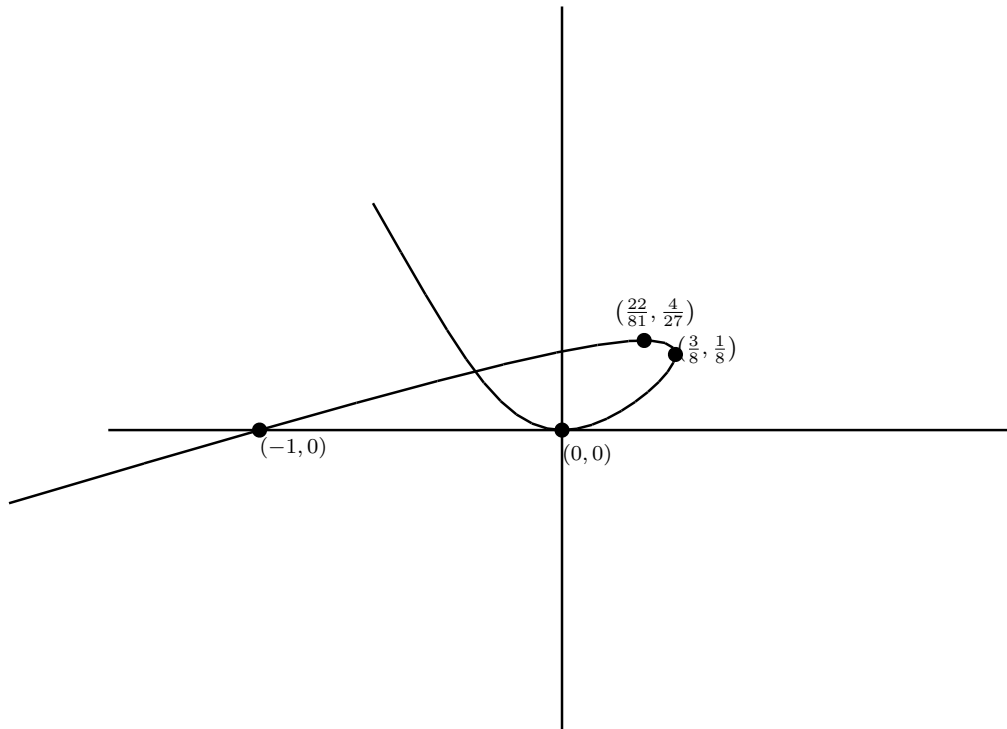
5 次のようにパラメーター表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = t - 2t^4, \quad y = y(t) = t^2 - t^3$$

$x'(t) = 1 - 8t^3, y'(t) = 2t - 3t^2$ である。 $x'(t) = 0$ を解くと $t = \frac{1}{2}$ が得られ、 $y'(t) = 0$ を解くと $t = 0, \frac{2}{3}$ が得られる。
 $x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために、途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
x'	+	+	+	0	-	-	-
x	→	→	→		←	←	←
y'	-	0	+	+	+	0	-
y	↓		↑	↑	↑		↓
曲線	↘	→	↗	↑	↖	←	↙

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $(x(0), y(0)) = (0, 0), (x(\frac{1}{2}), y(\frac{1}{2})) = (\frac{3}{8}, \frac{1}{8}), (x(\frac{2}{3}), y(\frac{2}{3})) = (\frac{22}{81}, \frac{4}{27})$ である。 $y(t) = 0$ を解くと $t = 0, 1$ を得る。 $(x(0), y(0)) = (0, 0), (x(1), y(1)) = (-1, 0)$ なので x 軸との交点は $(0, 0), (-1, 0)$ である。
 $x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ を得る。 y 軸との交点は $(0, 0), (0, \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{2})$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番		氏名	
		籍号			

6 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$$

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n = \sum_{i=0}^n {}_n C_i \cdot 1^i \geq \sum_{i=0}^2 {}_n C_i \cdot 1^i \\ &= {}_n C_0 + {}_n C_1 \cdot 1 + {}_n C_2 \cdot 1^2 = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} > \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

より

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{n(n-1)}$$

が成立する。3 辺を n 倍すると

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}$$

となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0$ とはさみうちの定理より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ となる。

7 不定積分

$$\int \arctan x \, dx$$

を求めよ。ヒント: $f' = 1, g = \arctan x$ とおき部分積分を実行し, その後置換積分を行う。

$f' = 1, g = \arctan x$ とおくと $f = x, g' = \frac{1}{1+x^2}$ なので

$$\begin{aligned} \int \arctan x \, dx &= fg - \int fg' \, dx \\ &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \end{aligned}$$

となる。ここで $t = 1 + x^2$ とおくと

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+x^2} \, dx &= \int \frac{x}{t} \frac{1}{2x} \, dt = \int \frac{1}{2} \frac{1}{t} \, dt \\ &= \frac{1}{2} \log |t| = \frac{1}{2} \log |1+x^2| = \frac{1}{2} \log(1+x^2) \end{aligned}$$

なので

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

となる。

8 授業についての感想, 数学について思う事などがあれば記せ (5)。