数学序論第１回試験

2016–6–6　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 P, Q を命題とする。$\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \implies Q$ の真理値表は下のようになっている。$((P \implies Q) \implies P) \implies P$ が恒真命題 (常に真となる命題) であるかどうかを真理値表を用いて調べよ。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

$((P \implies Q) \implies P) \implies P$ 真理値表は次の様になる。

P	Q	$P \implies Q$	$(P \implies Q) \implies P$	$((P \implies Q) \implies P) \implies P$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

$((P \implies Q) \implies P) \implies P$ の真理値表のすべての欄が T であるので恒真命題である。

2 n が自然数のとき $n(n^2-1)$ が 3 で割り切れることを数学的帰納法で証明せよ。

$S(n) = n(n^2-1)$ とおき,「$S(n)$ が 3 で割り切れる」という命題を $P(n)$ とする。
(1) $S(1) = 1(1^2-1) = 0$ となる。0 は 3 で割り切れるので $P(1)$ は成立している。
(2) 自然数 k に対し $P(k)$ の成立を仮定する。すなわち $S(k)$ が 3 で割り切れることを仮定する。

$$\begin{aligned} S(k+1) - S(k) &= (k+1)\big((k+1)^2-1\big) - k(k^2-1) = (k+1)^3 - (k+1) - k^3 + k \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 - k^3 + k = 3k(k+1) \end{aligned}$$

となる。よって $S(k+1) - S(k)$ は 3 で割り切れる。
帰納法の仮定より $S(k)$ が 3 で割り切れるので $S(k+1) = \big(S(k+1) - S(k)\big) + S(k)$ も 3 で割り切れる。よって $P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面のベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^2$ と書く。$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を平面のベクトルとする。ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が次の条件をみたすとき，$\mathbb{R}^2$ を**生成**するという；

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ \exists a, b \in \mathbb{R} \ \ \boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2$$

(1) 次のベクトルの組が $\mathbb{R}^2$ を生成するかどうか調べよ。

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルとする。$a = \dfrac{x+y}{3}, b = \dfrac{2x-y}{3}$ とおくと

$$\begin{aligned} a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 &= \frac{x+y}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2x-y}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x+y \\ 2(x+y) \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x-y \\ -(2x-y) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x+y+2x-y \\ 2x+2y-2x+y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

となる。
よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成する。

(2) 次のベクトルの組が $\mathbb{R}^2$ を生成するかどうか調べよ。

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が $\mathbb{R}^2$ を生成すると仮定する。このとき $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し実数 a, b が存在して

$$\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2$$

となっている。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2 = a\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ -2a+2b \end{pmatrix}$$

なので $0 = a - b, 1 = -2a + 2b$ より

$$1 = -2a + 2b = -2(a-b) = -2 \cdot 0 = 0$$

となり，これは矛盾。よって背理法より生成しない。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の連立方程式の解を求めよ。

$$x(1-2x^2-y^2)=0 \text{ かつ } y(1-x^2-3y^2)=0$$

$x(1-2x^2-y^2)=0$ を **1 式**, $y(1-x^2-3y^2)=0$ を **2 式**とする。

$$x(1-2x^2-y^2)=0 \iff (x=0 \ \vee \ 1-2x^2-y^2=0)$$

$$y(1-x^2-3y^2)=0 \iff (y=0 \ \vee \ 1-x^2-3y^2=0)$$

が成立している。

$$\begin{aligned}1\text{ 式}\wedge 2\text{ 式} &\iff \bigl(x=0 \ \vee \ 1-2x^2-y^2=0\bigr)\wedge\bigl(y=0 \ \vee \ 1-x^2-3y^2=0\bigr)\\ &\iff (x=0\wedge y=0)\vee\bigl(x=0\wedge 1-x^2-3y^2=0\bigr)\vee\bigl(1-2x^2-y^2=0\wedge y=0\bigr)\vee\bigl(1-2x^2-y^2=0\wedge 1-x^2-3y^2=0\bigr)\end{aligned}$$

なので 4 つの場合に分けて解を求める。
(1) $x=0\wedge y=0$ のとき解は $(x,y)=(0,0)$ である。
(2) $x=0\wedge 1-x^2-3y^2=0$ のとき, $x=0$ を 2 番目の式に代入すると $1-3y^2=0$ より $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。
(3) $1-2x^2-y^2=0\wedge y=0$ のとき $y=0$ を 1 番目の式に代入すると $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。
(4) $1-2x^2-y^2=0\wedge 1-x^2-3y^2=0$ のとき 1 番目の式から 2 番目の式の 2 倍を引くと

$$-1+5y^2=0$$

が得られ $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となる。これを元の式に代入すると $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ が得られる。
よって解は $(x,y)=(0,0),\left(0,\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ である。

$\boxed{\mathbf{5}}$ X, Y を集合とし, $f:X\longrightarrow Y$ とする。A, B を X の部分集合とする。ここで $f(A)=\{\, y\in Y \mid \exists x\in A \ y=f(x)\,\}$ と定義する。

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$$

を証明せよ。

$f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$ および $f(A\cup B)\supseteq f(A)\cup f(B)$ を示せばよい。
y を $f(A\cup B)$ の任意の元とする。このとき $x\in A\cup B$ が存在して $y=f(x)$ となっている。
$x\in A$ のとき $y=f(x)\in f(A)\subseteq f(A)\cup f(B)$ であり, $x\in B$ のとき $y=f(x)\in f(B)\subseteq f(A)\cup f(B)$ である。いずれの場合も $y\in f(A)\cup f(B)$ となっている。よって $f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$ が示された。
y を $f(A)\cup f(B)$ の元とする。
$y\in f(A)$ のとき $x\in A$ が存在して $y=f(x)$ となる。このとき $x\in A\subseteq A\cup B$ なので $y=f(x)\in f(A\cup B)$ となる。
$y\in f(B)$ のとき $x\in B$ が存在して $y=f(x)$ となる。このとき $x\in B\subseteq A\cup B$ なので $y=f(x)\in f(A\cup B)$ となる。
いずれの場合も $y\in f(A\cup B)$ となるので $f(A)\cup f(B)\subseteq f(A\cup B)$ が成立する。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{6}}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるとは,

$$\forall x_1, x_2 \in X \;\; x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

が成立することである。写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは,

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X \;\; y = f(x)$$

が成立することである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

(2) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists y \in Y \; \forall x \in X \quad y \neq f(x)$$

(3) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $f : A \longrightarrow B$ を $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。

$f(x) = 1$ となる $x \in A$ が存在しないので f は全射でない。よって全単射でもない。

(4) 写像 $f : [\,0, \infty\,) \longrightarrow [\,0, \infty\,)$ を $f(x) = x^4$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。ここで関数 $y = \sqrt{x}$ の存在は既知としてよい。

$x_1, x_2 \in [\,0, \infty\,)$ に対し $x_1 \neq x_2$ とする。

$x_1 < x_2$ のとき $f(x_1) = x_1^4 < x_2^4 = f(x_2)$ となるので, $f(x_1) \neq f(x_2)$ である。

$x_1 > x_2$ のとき $f(x_1) = x_1^4 > x_2^4 = f(x_2)$ となるので, $f(x_1) \neq f(x_2)$ である。

いずれの場合も $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成立するので, f は単射である。

$y \in [\,0, \infty\,)$ を任意の元とする。$x = \sqrt{\sqrt{y}}$ とおくと, $x \in [\,0, \infty\,)$ である。

$$f(x) = \left(\sqrt{\sqrt{y}}\right)^4 = (\sqrt{y})^2 = y$$

より f は全射である。

よって f は全単射である。

$\boxed{\mathbf{7}}$ 授業についての感想, 数学について思う事などがあれば記せ (5)。