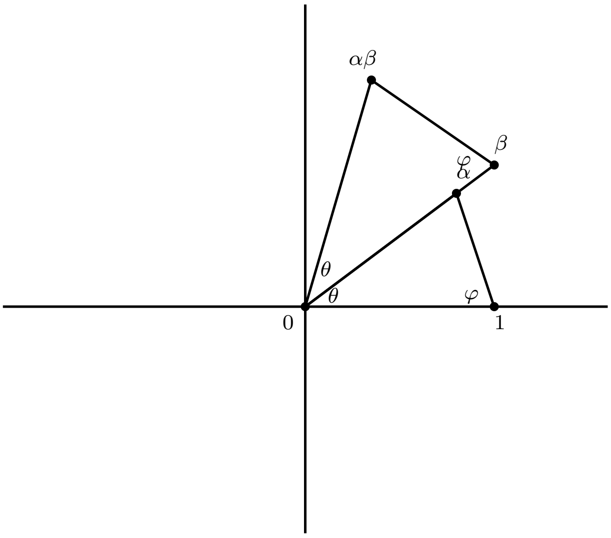
数学序論第 2 回試験

2016–7–4　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 複素平面内に α, β が下図の様に与えられている。$\alpha\beta$ を作図により複素平面に図示し，どの様に作図したか説明せよ。作図はフリーハンドでよいが，どの角とどの角が等しいか等の情報は図に書き入れること。



$\angle\alpha 01 = \theta, \angle 01\alpha = \varphi$ とする。点 0 から直線 $0P_1$ を引く。ただし直線 0β との角度が θ になるものとする。点 β から直線 βP_2 を引く。ただし直線 0β との角度が φ になるものとする。直線 $0P_1$ と直線 βP_2 の交点を P とする。即ち $\triangle 01\alpha$ と $\triangle 0\beta P$ が相似になるように作図する。このとき点 P が $\alpha\beta$ に対応する。

2 複素数 $z = x + iy$ に対し $\overline{z} = x - iy$ を z の共役複素数とする。α, β を複素数とするとき

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$$

が成立することを示せ。

$\alpha = x_1 + iy_1, \beta = x_2 + iy_2$ とおくと

$$\overline{\alpha} = x_1 - iy_1, \quad \overline{\beta} = x_2 - iy_2$$

である。

$$\alpha \cdot \beta = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

よって

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$$

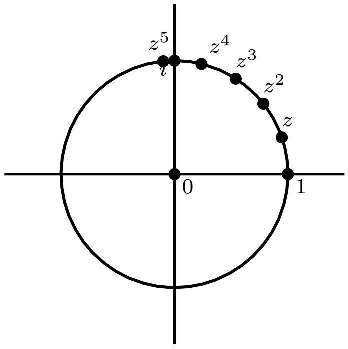
が成立する。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問に答えよ。

(1) $z = e^{\frac{i}{3}} = \exp\left(\frac{i}{3}\right)$ とする。z, z^2, z^3, z^4, z^5 を図示せよ。



(2) n を自然数とし，$z = e^{\frac{i}{n}} = \exp\left(\frac{i}{n}\right)$ とする。z は第 1 象限にある。すなわち $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とするとき $a > 0, b > 0$ である。z^2, z^3 も第 1 象限にあるとする。$z^4, z^5, \ldots$ と順に次々に計算して行ったとき，z^{32} までは第 1 象限にあり，z^{33} で初めて第 2 象限となった。このときの n を求めよ。ただし $\pi = 3.14$ とする。

$z^{32} = \exp\left(i\frac{32}{n}\right)$ が第 1 象限にあり，$z^{33} = \exp\left(i\frac{33}{n}\right)$ が第 2 象限にあることより

$$\frac{32}{n} < \frac{\pi}{2} < \frac{33}{n}$$

これより

$$20.382 = \frac{64}{\pi} < n < \frac{66}{\pi} = 21.019$$

となり，n は自然数なので $n = 21$ である。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 和積公式

$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

を証明せよ。ただし加法定理

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b, \quad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

およびオイラーの公式 $(e^{ix} = \cos x + i\sin x)$ と指数法則を用いてよい。

オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ より $e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x$ となり，これより

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

を得る。

$$\begin{aligned}
2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) &= 2\frac{1}{2}\left(\exp\left(i\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) + \exp\left(-i\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\right)\frac{1}{2i}\left(\exp\left(i\left(\frac{x-y}{2}\right)\right) - \exp\left(-i\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\exp(ix) + \exp(-iy) - \exp(iy) - \exp(-ix)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) - \frac{1}{2i}\left(e^{iy} - e^{-iy}\right) \\
&= \sin x - \sin y
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ $z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とする。z^{2015} を計算せよ。

$\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}, \sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より極形式で表すと $z=\exp\left(i\dfrac{2\pi}{3}\right)$ なので $z^3=\exp\left(3i\dfrac{2\pi}{3}\right)=\exp\left(i2\pi\right)=1$ である。

$$\begin{aligned} z^{2015} &= \left(\exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{2015} = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)^{2013+2} \\ &= \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)^{3\cdot 671}\exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)^{2} = 1^{671}\exp\left(2i\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \exp\left(i\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ a を正の実数とする。n を自然数とするとき a^n を次の様に定義する。

(1)　$a^1=a$

(2)　自然数 k に対して a^k が定義されているとき

$$a^{k+1}=a^ka$$

と定義する。
このとき自然数 m,n に対して指数法則

$$a^{m+n}=a^ma^n$$

が成立することを n に関する帰納法を用いて証明せよ。

$n=1$ のとき定義より

$$a^{m+1}=a^ma=a^ma^1$$

となり成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $a^{m+k}=a^ma^k$ の成立を仮定する。

$$a^{m+(k+1)}=a^{(m+k)+1}=a^{(m+k)}a=\left(a^ma^k\right)a=a^m\left(a^ka\right)=a^ma^{k+1}$$

となり $n=k+1$ のときも成立する。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{7}$ 対数の定義

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

および指数法則のみを用いて

$$\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

を証明せよ。

$x = \log_b p, y = \log_b a$ とおくと

$$b^x = p, \quad b^y = a$$

である。

$$p = b^x = \left(b^y\right)^{\frac{x}{y}} = a^{\frac{x}{y}}$$

となるので，この関係を対数に直すと

$$\log_a p = \frac{x}{y} = \frac{\log_b p}{\log_b a}$$

$\boxed{8}$ 次の式を簡単にせよ。

$$\arctan 3 + \arctan 4$$

$\tan x$ に関する加法定理

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

が必要かもしれない。

$\alpha = \arctan 3, \beta = \arctan 4$ とおくと

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$$

であるが，

$$\tan \alpha = 3 > 0, \qquad \tan \beta = 4 > 0$$

より

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

である。よって

$$0 < \alpha + \beta < \pi$$

である。

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{3+4}{1-3\cdot 4} = -\frac{7}{11} < 0$$

$\tan(\alpha+\beta) < 0$ より $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi$ となる。よって

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta - \pi < 0 < \frac{\pi}{2}$$

と $\tan(\alpha+\beta-\pi) = \tan(\alpha+\beta) = -\frac{7}{11}$ より

$$\arctan\left(-\frac{7}{11}\right) = \alpha + \beta - \pi$$

以上により

$$\arctan 3 + \arctan 4 = \alpha + \beta = \arctan\left(-\frac{7}{11}\right) + \pi$$