数学序論第 1 回試験

2017–6–1　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：10 桁の在籍番号を書く事。

1 P, Q を命題とする。$\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \implies Q$ の真理値表は下のようになっている。$P \implies Q$ と $((P \implies Q) \implies P) \implies Q$ が同値であるかどうかを真理値表を用いて調べよ。

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \implies Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

$((P \implies Q) \implies P) \implies Q$ の真理値表は次の様になる。

P	Q	$P \implies Q$	$(P \implies Q) \implies P$	$((P \implies Q) \implies P) \implies Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

$P \implies Q$ と $((P \implies Q) \implies P) \implies Q$ の真理値表の対応する欄が同じであるので同値である。

2 n が自然数のとき $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ が成立することを数学的帰納法で証明せよ。

$n=1$ のとき $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1$ であり，$\displaystyle\left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$ なので等号が成立する。

$n=k$ のとき成立を仮定する。すなわち $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ を仮定する。$n=k+1$ のとき

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 \left(k^2 + 4(k+1)\right)$$
$$= \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 (k+2)^2 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

となる。$k+1$ のときも成立しているので，数学的帰納法により，すべての自然数で成立する。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面のベクトル全体の集合を $\mathbb{R}^2$ と書く。$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ を平面のベクトルとする。ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が次の条件をみたすとき，$\mathbb{R}^2$ を**生成**するという；

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2\ \exists a, b \in \mathbb{R}\ \ \boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}_1 + b\boldsymbol{x}_2$$

(1)　次のベクトルの組が $\mathbb{R}^2$ を生成するかどうか調べよ。

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ を生成すると仮定する。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し，実数 a_1, a_2 が存在して

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と表すことができる。
$1 = a_1 1 + a_2, 0 = 2a_1 + 2a_2$ より

$$2 = 1 \cdot 1 = 2(a_1 + a_2) = 0$$

となる。これは矛盾。よって $\mathbb{R}^2$ を生成しない。

(2)　次のベクトルの組が $\mathbb{R}^2$ を生成するかどうか調べよ。

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し

$$a_1 = \frac{1}{2}y, \quad a_2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y$$

とおく。

$$\begin{aligned} a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 &= \frac{1}{2}y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2}y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

よって $\mathbb{R}^2$ を生成する。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 実数の範囲で次の連立方程式の解を求めよ。

$$x(x^2+3y^2-1)=0 \text{ かつ } y(3x^2+y^2-1)=0$$

$x(x^2+3y^2-1)=0$ を **1 式**, $y(3x^2+y^2-1)=0$ を **2 式**とする。

$$1\text{ 式} \iff x=0 \lor x^2+3y^2-1=0$$
$$2\text{ 式} \iff y=0 \lor 3x^2+y^2-1=0$$

「$x=0$」を命題 X,「$x^2+3y^3-1=0$」を命題 A,「$y=0$」を命題 Y,「$3x^2+y^3-1=0$」を命題 B とおく。

$$1\text{ 式} \iff X \lor A$$
$$2\text{ 式} \iff Y \lor B$$

連立方程式の条件は (1 式)$\land$(2 式) なので

$$\begin{aligned}(1\text{ 式})\land(2\text{ 式}) &\equiv (X\lor A)\land(Y\lor B)\\ &\equiv (X\land Y)\lor(X\land B)\lor(Y\land A)\lor(B\land A)\end{aligned}$$

$X\land Y$ のとき解は $(x,y)=(0,0)$ である。
$X\land B$ のときは $x=0$ (命題 X) を $3x^2+y^2-1=0$ (命題 B) に代入すると $y=\pm1$ となる。
$Y\land A$ のときは $y=0$ (命題 Y) を $x^2+3y^2-1=0$ (命題 A) に代入すると $x=\pm1$ となる。
$A\land B$ のときは B の両辺を 3 倍したものから，A の両辺を引くと

$$8x^2-2=0$$

となるので $x=\pm\dfrac{1}{2}$ である。y も同様に計算すると $y=\pm\dfrac{1}{2}$ である。
以上により解は $(x,y)=(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0),\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right),\ \left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right),\ \left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ である。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問に答えよ。
(1) 集合 A,B が $A\subseteq B$ であることの定義は

$$\forall a \ \ a\in A \implies a\in B$$

であるがこの否定命題を述べよ。

$$\exists a \quad a\in A\land a\notin B$$

(2) $\mathbb{N}$ を自然数全体からなる集合，$\mathbb{P}$ を素数全体からなる集合とする。$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{P}$ が成立しないことを証明せよ。

4 は自然数であるが，素数ではないので $4\in\mathbb{N}$ であり $4\notin\mathbb{P}$ である。よって $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{P}$ は成立しない。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{6}}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であるとは,

$$\forall x_1, x_2 \in X \ \ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

が成立することである。写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射であるとは,

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X \ \ y = f(x)$$

が成立することである。このとき次の問いに答えよ。

(1) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

(2) 「写像 $f : X \longrightarrow Y$ が全射でない」という命題を論理記号を用いて表せ。

$$\exists y \in Y \quad \forall x \in X \qquad y \neq f(x)$$

(3) $\mathbb{N}$ を自然数全体からなる集合とする。$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ を $f(n) = n + 1$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。

f は全射ではない。なぜなら $1 \in \mathbb{N}$ に対し, $f(n) = 1$ となる自然数 n は存在しない。もし存在したとすると $f(n) = n + 1 = 1$ より $n = 0$ となり 0 が自然数になる。

f は全射でないので全単射ではない。

(4) 写像 $f : [\,0, \infty\,) \longrightarrow [\,0, \infty\,)$ を $f(x) = \sqrt{x}$ で定義する。このとき f が全単射であるかどうか理由をつけて述べよ。

単射性 ： $f(x_1) = f(x_2)$ とすると $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$ となる。両辺を 2 乗すると $x_1 = x_2$ が得られる。よって f は単射である。

全射性：$[\,0, \infty\,)$ の任意の元 y に対し $x = y^2$ とおく。

$$f(x) = x^2 = (\sqrt{y})^2 = y$$

よって f は全射である。

以上により f は全単射である。