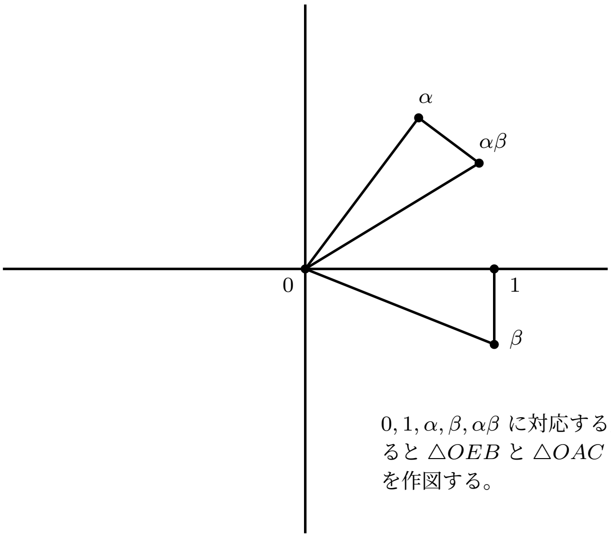
数学序論第 2 回試験

2017–6–22　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：10 桁の在籍番号を書く事。

$\boxed{1}$ 複素平面内に α, β が下図の様に与えられている。$\alpha\beta$ を作図により複素平面に図示し，どの様に作図したか説明せよ。作図はフリーハンドでよいが，どの角とどの角が等しいか等の情報は図に書き入れること。



$0, 1, \alpha, \beta, \alpha\beta$ に対応する点を O, E, A, B, C とすると $\triangle OEB$ と $\triangle OAC$ が相似にあるように点 C を作図する。

$\boxed{2}$ a, b, c, d を実数とし，$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とする。複素数 α が $f(x) = 0$ の解ならば，その共役複素数 $\overline{\alpha}$ も $f(x) = 0$ の解であることを示せ。ただし共役複素数の性質 $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$, $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ は既知としてよい。

a, b, c, d は実数なので $\overline{a} = a, \overline{b} = b, \overline{c} = c, \overline{d} = d$ となる。

$$\begin{aligned}
\overline{f(\alpha)} &= \overline{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d} = \overline{a\alpha^3} + \overline{b\alpha^2} + \overline{c\alpha} + \overline{d} \\
&= \overline{a} \cdot \overline{\alpha^3} + \overline{b} \cdot \overline{\alpha^2} + \overline{c} \cdot \overline{\alpha} + \overline{d} = a\overline{\alpha^3} + b\overline{\alpha^2} + c\overline{\alpha} + d \\
&= a\left(\overline{\alpha}\right)^3 + b\left(\overline{\alpha}\right)^2 + c\overline{\alpha} + d + f\left(\overline{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

よって

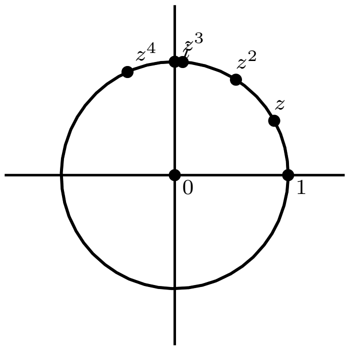
$$f\left(\overline{\alpha}\right) = \overline{f(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{3}$ 次の問に答えよ。

(1) $z = e^{\frac{i}{2}} = \exp\left(\frac{i}{2}\right)$ とする。z, z^2, z^3, z^4 を図示せよ。



(2) n を自然数とし，$z = e^{\frac{i}{n}} = \exp\left(\frac{i}{n}\right)$ とする。z は第 1 象限にある。すなわち $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とするとき $a > 0, b > 0$ である。z^2, z^3 も第 1 象限にあるとする。$z^4, z^5, \ldots$ と順に次々に計算して行ったとき，z^9 までは第 1 象限にあり，z^{10} で初めて第 2 象限となった。このときの n を求めよ。ただし $\pi = 3.14$ とする。

$z^9 = \exp\left(i\frac{9}{n}\right)$ が第 1 象限にあり，$z^{10} = \exp\left(i\frac{10}{n}\right)$ が第 2 象限にあることより

$$\frac{9}{n} < \frac{\pi}{2} < \frac{10}{n}$$

これより

$$5.7324 = \frac{18}{\pi} < n < \frac{20}{\pi} = 6.3694$$

となり，n は自然数なので $n = 6$ である。

$\boxed{4}$ 和積公式

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

を証明せよ。ただし加法定理

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b, \quad \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

またはオイラーの公式 $(e^{ix} = \cos x + i\sin x)$ と指数法則を用いてよい。

オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ より $e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x$ となり，これより

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

を得る。

$$\begin{aligned}
2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) &= 2\frac{1}{2}\left(\exp\left(i\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) + \exp\left(-i\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\right)\frac{1}{2}\left(\exp\left(i\left(\frac{x-y}{2}\right)\right) + \exp\left(-i\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\exp(ix) + \exp(-iy) + \exp(iy) + \exp(-ix)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{iy} + e^{-iy}\right) \\
&= \cos x + \cos y
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ a を正の実数とする。n を自然数とするとき a^n を次の様に定義する。

(1) $a^1 = a$

(2) 自然数 k に対して a^k が定義されているとき

$$a^{k+1} = a^k a$$

自然数に対する指数法則とは

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad a^{m+n} = a^m a^n$$

である。これを数学的帰納法を用いて証明したい。このとき次の問に答えよ。

(1) $P(k)$ を自然数 k に関する命題とする。ただし $P(k)$ は $P(1)$ および $P(k) \implies P(k+1)$ が示されたとき，自然数に対する指数法則が証明される命題とする。条件を満たす命題 $P(k)$ がどのようなものか書け。

「任意の自然数 m に対し $a^{m+k} = a^m a^k$ が成立する。」

(2) $P(k)$ を仮定するとき $P(k+1)$ が成立することを示せ。

$$\begin{aligned}
a^{m+(k+1)} &= a^{(m+k)+1} && \text{(結合法則)} \\
&= a^{m+k}a && \text{(定義)} \\
&= \left(a^m a^k\right) a && \text{(帰納法の仮定)} \\
&= a^m \left(a^k a\right) && \text{(結合法則)} \\
&= a^m a^{k+1} && \text{(定義)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 対数の定義

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

および指数法則のみを用いて

$$\log_a pq = \log_a p + \log_a q$$

を証明せよ。

$A = \log_a p, B = \log_a q$ とおくと

$$p = a^A, \quad q = a^B$$

となるので指数法則より

$$pq = a^A a^B = a^{A+B}$$

これを対数に直すと

$$\log_a pq = A + B = \log_a p + \log_a q$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{7}$ 次の式を証明せよ。$\arcsin\dfrac{3}{5}+\arcsin\dfrac{5}{13}=\arcsin\dfrac{56}{65}$

$\alpha=\arcsin\dfrac{3}{5}, \beta=\arcsin\dfrac{5}{13}$ とおくと $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\sin\beta=\dfrac{5}{13}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\beta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が成立している。ここで $\dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{13}$ は共に正なので

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}, \qquad 0<\beta<\frac{\pi}{2}$$

よって $0<\alpha+\beta<\pi$ が成立する。$\cos\alpha, \cos\beta$ ともに正なので

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5} \qquad \cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$$

が成立する。

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\frac{5}{13}=\frac{33}{65}>0$$

より $0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$。このことと

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\frac{5}{13}=\frac{56}{65}$$

より

$$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{5}{13}=\arcsin\frac{56}{65}$$

が成立する。

$\boxed{8}$ 次の式を簡単にせよ。

$$\arcsin\frac{3}{4}+\arcsin\frac{4}{5}$$

$\alpha=\arcsin\dfrac{3}{4}, \beta=\arcsin\dfrac{4}{5}$ とおくと $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\sin\beta=\dfrac{4}{5}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\beta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が成立している。ここで $\dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}$ は共に正なので

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}, \qquad 0<\beta<\frac{\pi}{2}$$

よって $0<\alpha+\beta<\pi$ が成立する。$\cos\alpha, \cos\beta$ ともに正なので

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

が成立する。

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{4}\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{7}}{4}\frac{4}{5}=\frac{9+4\sqrt{7}}{20}$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}\frac{3}{5}-\frac{3}{4}\frac{4}{5}=\frac{3(\sqrt{7}-4)}{20}<0$$

$\cos(\alpha+\beta)<0$ より $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$, よって $0<\pi-(\alpha+\beta)<\dfrac{\pi}{2}$。より

$$\sin(\pi-(\alpha+\beta))=\sin(\alpha+\beta)=\frac{9+4\sqrt{7}}{20}$$

より $\pi-(\alpha+\beta)=\arcsin\dfrac{9+4\sqrt{7}}{20}$ よって

$$\arcsin\frac{3}{4}+\arcsin\frac{4}{5}=\pi-\arcsin\frac{9+4\sqrt{7}}{20}$$