数学序論第３回試験

2017–7–20　　河野

注意：・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：2 年生以上は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 関数 $y = f(x) = \sqrt{x}$ の導関数を定義に基づいて求めよ。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2 関数 $y = f(x) = e^{x^3} \cos\left(x^4 + x^3\right)$ の導関数を求めよ。ただし $(e^x)' = e^x, (\cos x)' = -\sin x$ 等の諸公式を用いてよい。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{x^3}\right)' \cos\left(x^4 + x^3\right) + e^{x^3}\left(\cos\left(x^4 + x^3\right)\right)' \\ &= 3x^2 e^{x^3} \cos\left(x^4 + x^3\right) - (4x^3 + 3x^2) e^{x^3} \sin\left(x^4 + x^3\right) \end{aligned}$$

3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^9 + 6n^6}}{n^3 + n^2}$ を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^9 + 6n^6}}{n^3 + n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^9 + 6n^6} \cdot \frac{1}{n^3}}{(n^3 + n^2) \cdot \frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2 + 6\frac{1}{n^3}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\sqrt[3]{2 + 6 \cdot 0}}{1 + 0} = \sqrt[3]{2}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $y=f(x)=x^3\log x$ に対し増減表を書き，増減・極点・凹凸・変曲点を調べ，グラフの概形を描き，変曲点における接線を描け。

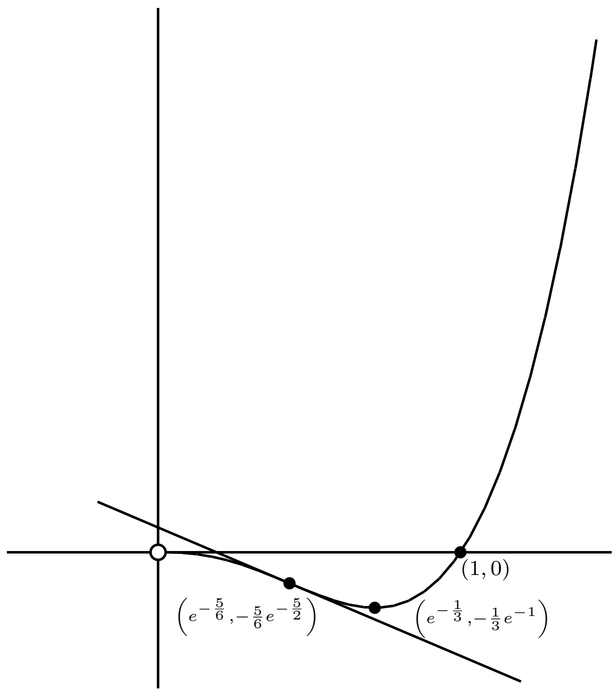
$\log x$ が定義されるのは $x>0$ なので $f(x)$ の定義域も $x>0$ である。$f'(x)=\left(x^3\right)'\log x+x^3\left(\log x\right)'=3x^2\log x+x^3\dfrac{1}{x}=3x^2\log x+x^2$, $f''(x)=6x\log x+3x+2x=6x\log x+5x$ となる。$f'(x)=0$ を解いて $x=e^{-\frac{1}{3}}$ を得る。また $f''(x)=0$ を解いて $x=e^{-\frac{5}{6}}$ を得る。間の正負を調べることにより，増減表は次の様になることが分かる。

x		$e^{-\frac{5}{6}}$		$e^{-\frac{1}{3}}$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}}$	↘	$-\frac{1}{3}e^{-1}$	↗

よって変曲点は $\left(e^{-\frac{5}{6}},-\dfrac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}}\right)$ であり，区間 $\left(0,\,e^{-\frac{5}{6}}\right)$ で上に凸，区間 $\left(e^{-\frac{5}{6}},\,\infty\right)$ で下に凸になる。

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{\left(\frac{1}{x^3}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-3\frac{1}{x^4}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^3}{3}=0$$

であり，$f(x)=0$ の解が $x=1$ であることに注意するとグラフの概形は下のようになる。



$\boxed{\mathbf{5}}$ $a,b>0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$ を求めよ。

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(a^x-b^x\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to0}\left(a^x\log a-b^x\log b\right)=\log a-\log b$$

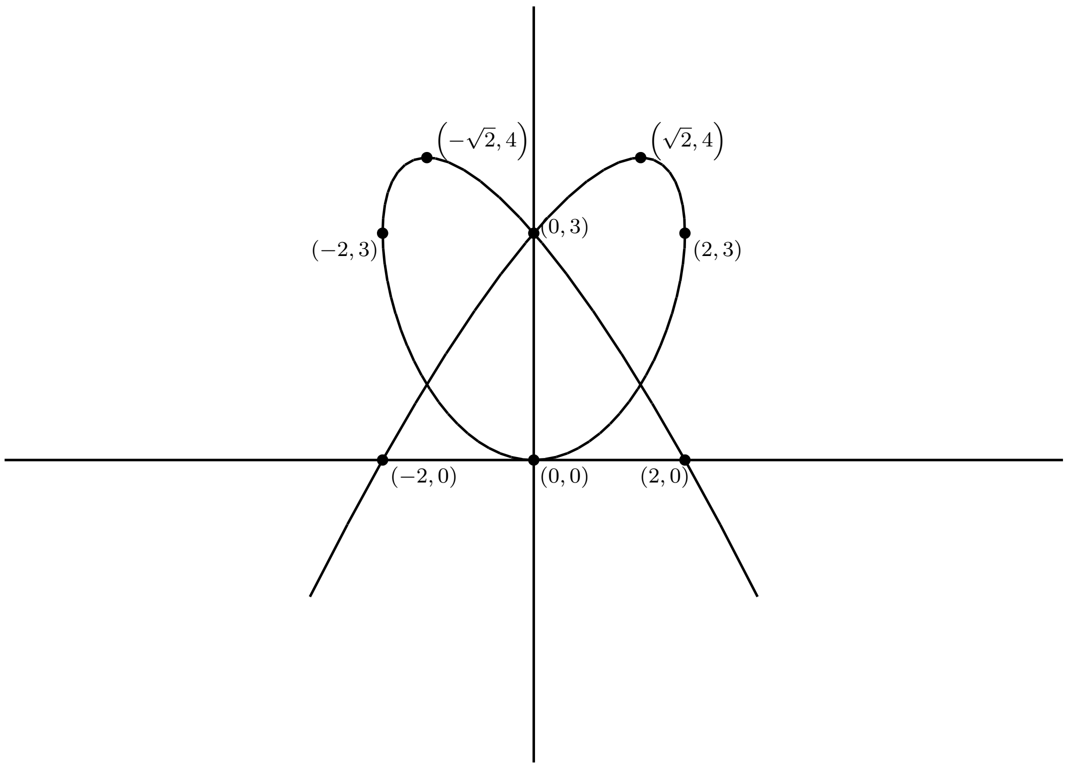
$\boxed{\mathbf{6}}$ 次のようにパラメーター表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = t^3 - 3t, \qquad y = y(t) = 4t^2 - t^4$$

$x'(t) = 3t^2 - 3, y'(t) = 8t - 4t^3$ である。$x'(t) = 0$ を解くと $t = \pm 1$ が得られ，$y'(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm\sqrt{2}$ が得られる。
$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$	
x'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$
曲線	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $(x(0), y(0)) = (0,0)$，$\left(x\left(\sqrt{2}\right), y\left(\sqrt{2}\right)\right) = \left(-\sqrt{2}, 4\right)$，$\left(x\left(-\sqrt{2}\right), y\left(-\sqrt{2}\right)\right) = \left(\sqrt{2}, 4\right)$，$(x(1), y(1)) = (-2, 3)$，$(x(1), y(-1)) = (2, 3)$ である。$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 2$ を得る。$(x(2), y(2)) = (2, 0)$，$(x(-2), y(-2)) = (-2, 0)$ なので x 軸との交点は $(0,0), (2,0), (-2,0)$ である。$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm\sqrt{3}$ を得る。$\left(x\left(\sqrt{3}\right), y\left(\sqrt{3}\right)\right) = (0, 3)$，$\left(x\left(-\sqrt{3}\right), y\left(-\sqrt{3}\right)\right) = (0, 3)$ なので y 軸との交点は $(0,0), (0,3)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在番籍号		氏名	

$\boxed{\mathbf{7}}$ 直線 $y = mx + n$ が $y = f(x)$ に異なる 2 点で接しているとき複接線という。$y = f(x) = -x^4 + 2x^2 - x$ の複接線を求めよ。

$F(x) = f(x) - (mx + n)$ とおく。$y = mx + n$ は複接線なので 2 つの異なる接点を $(a, f(a)), (b, f(b))$ とする。$F(x)$ は $(x-a)^2$ および $(x-b)^2$ で割り切れる。このことより $F(x)$ は $(x-a)^2(x-b)^2$ で割り切れる。最高次係数を比較することにより $F(x) = -(x-a)^2(x-b)^2$ が分かる。

$$-(x-a)^2(x-b)^2 = -x^4 + 2(a+b)x^3 - \left((a+b)^2 + 2ab\right)x^2 + 2ab(a+b)x - a^2b^2$$

となるが $F(x)$ と係数を比較して $a + b = 0, ab = -1$ が分かる。このとき

$$m = -1$$
$$n = (ab)^2 = 1$$

となり，求める接線は

$$y = -x + 1$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ 不定積分

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

を求めよ。

$t = 1 + x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = 2x$ より $dx = \dfrac{1}{2x}dt$ である。

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x}{t}\frac{1}{2x}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\log|t| = \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ 不定積分

$$\int \log x\,dx$$

を求めよ。

$f' = 1,\ g = \log x$ とおくと $f = x$ なので

$$\int \log x\,dx \quad = \quad fg - \int fg'\,dx = x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x$$