$\boxed{\text{工業数学 II}}$ $\boxed{\text{A}}$ 2001–9–14 河野

$\boxed{\text{問題は } A, B, C, D \text{ の 4 種類ある。回答用紙の先頭に } \boxed{A}\ \boxed{B}\ \boxed{C}\ \boxed{D} \text{ のいずれかを記入する事。}}$

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

1 次の偏微分方程式 (熱方程式と呼ばれる) を解く事を考える。

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{1}$$

ただし範囲は $0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq t$ とする。この熱方程式 (1) を初期条件 $u(x,0) = f(x) = x(x-2)$，境界条件 $u(0,t) = u(2,t) = 0$ の条件のもとで解こう。

(1) 最初に変数分離解を求める。変数分離解とは $u(x,t) = X(x)T(t)$ の形に書ける解である。$u(x,t)$ が偏微分方程式 (1) を満たす変数分離解のとき，$X(x)$ 及び $T(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた微分方程式を境界条件の元で解け。ただし次の事実は使ってよい。『微分方程式 $X''(x) + aX'(x) + bX(x) = 0$ に対し，$g(\mu) = \mu^2 + a\mu + b = 0$ の解を μ_1, μ_2 とするとき，

$$\begin{aligned} \mu_i\text{が実数で},\mu_1 \neq \mu_2\text{のときは} \quad & X(x) = C_1 e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_2 x}, \\ \mu_1 = \mu_2\text{のときは} \quad & X(x) = C_1 x e^{\mu_1 x} + C_2 e^{\mu_1 x}, \\ \mu_i\text{が複素数のとき},\mu_1 = \alpha + i\beta\text{とおくと} \quad & X(x) = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x \end{aligned}$$

となる。』

(3) $u(x,t), v(x,t)$ が熱方程式の解であるとき，a, b を定数とすると，$au(x,t) + bv(x,t)$ も熱方程式の解になる事を示せ。

(4) (2) で求めた変数分離解達の重ね合わせ ($\sum a_i u_i(x,t)$ の形) として，境界条件と初期条件を満たす熱法的式の解 $u(x,t)$ を求めよ。

2 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ.