

問題は複数ある。解答用紙の先頭に大きくテスト問題番号(見出しの直後に箱で囲んで書いてある数字)を書くこと。書いていない場合は採点不能のため零点になるので注意すること。裏面に注意が書いてあるので回答前に熟読すること。

1 関数 $f(z)$ の $z = a$ における留数の定義を述べよ。また $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ の $z = 1$ における留数を求めよ。

2 関数 $f(z)$ の $z = a$ における留数を $\text{Res}[a]$ とするとき

$$\text{Res}[a] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

を示せ。ただし C は a を中心とする半径 r の円とする。

3 以下最後の問題まで $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 11^2)^2}$ とする。積分 $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ を求めることを考える。

4 $g(z) = \frac{1}{(z + 11i)^2}$ とするとき $g(z)$ を $z = 11i$ においてテーラー展開したときの 0, 1, 2 次の項を求めよ (数字は冪乗のままですら計算しなくてもよい: 以下同じ)。

5 $f(z)$ を $z = 11i$ でローラン展開したときの $-2, -1, 0$ 次の項を求め、 $f(z)$ の $z = 11i$ における留数を求めよ。

6 正数 R に対し $\Gamma_R = \{z = x + iy \in \mathbf{C} \mid |z| = R, y \geq 0\}$, $C_R = \Gamma_R \cup \{z = x + iy \mid |x| \leq R, y = 0\}$ と置く。 $R = 1$ のとき $\int_{C_R} f(z) dz$ を求めよ。また $R > 2 \times 11$ のとき $\int_{C_R} f(z) dz$ を求めよ。

7 R がある正数 (各自決定せよ) より大きいとき、 $|z| = R$ のとき $\left| \frac{1}{z^2 + 11^2} \right| \leq \frac{2}{R^2}$ を示せ。

8 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz$ を求め、それを用いて I を計算せよ。

9 授業についての感想、数学について思う事などがあれば記せ。

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって、答案は単に「答」を書くだけでなく、「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから、主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが、「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。