$\boxed{\text{工業数学 II 第 1 回試験問題解答}}$　　2007–11–9　　河野

箱の中は $\boxed{\text{解答 (選択肢)}}$ である。

1 $w = f(z)$ を $z = a$ のまわりでテーラー級数展開することを考える。

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots \tag{1}$$

と展開されているとき z に a を代入して $f(a) = \boxed{a_0(\mathrm{gg})}$ を得る。式 (1) の両辺を z で微分すると

$$f'(z) = \boxed{a_1(21)} + \boxed{2a_2(26)}(z-a) + \cdots + \boxed{na_n(34)}(z-a)^{n-1} + \cdots \tag{2}$$

となるので，(2) 式に $z = a$ を代入して $f'(a) = \boxed{a_1(21)}$ を得る。n 回微分して $z = a$ を代入することにより $f^{(n)}(a) = \boxed{n!a_n(35)}$ を得る。このように n 次導関数が求まればテーラー級数の係数 a_n を決定することができる。

$w = f(z) = \log(z+1)$ を考える。$f'(z) = \boxed{\dfrac{1}{z+1}(44)}$ である。n 回微分すると $f^{(n)}(z) = \boxed{(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(z+1)^n}(\mathrm{gg})}$ となる。よって $z = 0$ でテーラー級数展開すると

$$\log(z+1) = \boxed{0(00)} + \boxed{1(01)}z + \cdots + \boxed{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(77)}z^n + \cdots$$

となる。

2 ρ_1 は実数，ρ_2 を実数または無限大とする。関数 $w = f(z)$ が $\rho_1 < |z-a| < \rho_2$ で正則であるとき，この領域で

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

という形で表示できる。これをローラン展開という。同じ関数でも展開する場所で形は変わる。

$w = f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ を $0 < |z-0| < 1$ で考える。

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \boxed{\frac{1}{1-z(43)}}$$

と部分分数に展開できる。$0 < |z-0| < 1$ では

$$\frac{1}{1-z} = \boxed{1(01)} + \boxed{1(01)}z + \cdots + \boxed{1(01)}z^n + \cdots \tag{3}$$

とテーラー展開できるので

$$f(z) = \cdots + \boxed{0(00)}\,\frac{1}{z^n} + \cdots + \boxed{1(01)}\,\frac{1}{z} + \boxed{1(01)} + \boxed{1(01)}\,z + \cdots + \boxed{1(01)}\,z^n + \cdots$$

とローラン展開できる。

次に $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ を $1 < |z-0|$ でローラン展開する。(3) 式は $1 < |z-0|$ では収束しない。$1 < |z-0|$ では

$$\frac{1}{1-z} = \cdots + \boxed{-1(11)}\,\frac{1}{z^n} + \cdots + \boxed{-1(11)}\,\frac{1}{z} + \boxed{0(00)} + \boxed{0(00)}\,z + \cdots + \boxed{0(00)}\,z^n + \cdots$$

とローラン展開できるので,

$$f(z) = \cdots + \boxed{-1(11)}\,\frac{1}{z^n} + \cdots + \boxed{0(00)}\,\frac{1}{z} + \boxed{0(00)} + \boxed{0(00)}\,z + \cdots + \boxed{0(00)}\,z^n + \cdots$$

とローラン展開できる。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $w = f(z) = z \sin \dfrac{1}{z}$ を $0 < |z-0|$ でローラン展開しよう。$\sin z$ を $z = 0$ でテーラー展開すると

$$\sin z = \boxed{0(00)} + \boxed{1(01)}\,z + \cdots + \boxed{(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}(94)}\,z^{2n-1} + \cdots$$

となるので

$$f(z) = \cdots + \boxed{(-1)^{n}\frac{1}{(2n+1)!}(\mathrm{gg})}\,\frac{1}{z^{2n}} + \cdots + \boxed{0(00)}\,\frac{1}{z} + \boxed{1(01)} + \boxed{0(00)}\,z + \cdots + \boxed{0(00)}\,z^{2n} + \cdots$$

とローラン展開できる。

選択肢

01: 1	02: 2	03: 3	04: 4	05: 5
06: 6	07: 7	08: 8	09: 9	10: 0
11: -1	12: -2	13: -3	14: -4	15: -5
16: -6	17: -7	18: -8	19: -9	20: -10
21: a_1	22: a_2	23: a_3	24: a_4	25: a_5
26: $2a_2$	27: $3a_3$	28: $6a_3$	29: $(n-1)a_{n-1}$	30: $(n-1)!a_{n-1}$
31: $\dfrac{a_{n-1}}{(n-1)!}$	32: $\dfrac{a_{n-1}}{n-1}$	33: na_{n-1}	34: na_n	35: $n!a_n$
36: $\dfrac{a_n}{n!}$	37: $\dfrac{a_n}{n}$	38: $(n+1)a_n$	39: $z-1$	40: $1-z$
41: $z+1$	42: $-(z+1)$	43: $\dfrac{1}{1-z}$	44: $\dfrac{1}{1+z}$	45: $-\dfrac{1}{1-z}$
46: $-\dfrac{1}{1+z}$	47: $\dfrac{1}{(1+z)^n}$	48: $\dfrac{1}{(1-z)^n}$	49: $\dfrac{n!}{(1+z)^n}$	50: $\dfrac{n!}{(1-z)^n}$
51: $\dfrac{(-1)^n}{(1+z)^n}$	52: $\dfrac{(-1)^n}{(1-z)^n}$	53: $\dfrac{(-1)^n n!}{(1+z)^n}$	54: $\dfrac{(-1)^n n!}{(1-z)^n}$	55: $\dfrac{(-1)^{n+1} n!}{(1+z)^n}$
56: $\dfrac{(-1)^{n+1} n!}{(1-z)^n}$	57: $\dfrac{(-1)^n (n-1)!}{(1+z)^n}$	58: $\dfrac{(-1)^n (n-1)!}{(1-z)^n}$	59: n	60: $n-1$
61: $n+1$	62: $(-1)^n n$	63: $(-1)^n(n-1)$	64: $(-1)^n(n+1)$	65: $(-1)^{n+1}n$
66: $(-1)^{n+1}(n-1)$	67: $(-1)^{n+1}(n+1)$	68: $n!$	69: $(n-1)!$	70: $(n+1)!$
71: $\dfrac{1}{n}$	72: $\dfrac{1}{n-1}$	73: $\dfrac{1}{n+1}$	74: $\dfrac{(-1)^n}{n}$	75: $\dfrac{(-1)^n}{n-1}$
76: $\dfrac{(-1)^n}{n+1}$	77: $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$	78: $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n-1}$	79: $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$	80: $\dfrac{1}{n!}$
81: $\dfrac{1}{(n-1)!}$	82: $\dfrac{1}{(n+1)!}$	83: $(-1)^n\dfrac{1}{n!}$	84: $\dfrac{(-1)^n}{(n-1)!}$	85: $\dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$
86: $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$	87: $\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!}$	88: $\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$	89: $\dfrac{1}{(2n)!}$	90: $\dfrac{1}{(2n-1)!}$
91: $\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$	92: $\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)!}$	93: $\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$	94: $\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}$	95: 2^{2007}