

解答用紙 記入方法

(1) 科目名には「工業数学Ⅱ第1回」と書くこと。

(2) 学年欄は西暦入学年度下1桁をマークすること。

2006年度入学 → 6, 2005年度入学 → 5,
2004年度入学 → 4, 2003年度入学 → 3,
2002年度入学 → 2, 2001年度入学 → 1,
2000年度入学 → 0, 1999年度入学 → 9

(3) クラス欄は次に従ってマークすること。

機械システム → 11, 電気電子 → 12, 情報システム → 13,
化学システム → 14, 機能材料 → 15, 土木開発 → 16

(4) 番号欄は次に従ってマークすること。

一般学生の場合： ここは3桁の数字を入れることになっているが、左端の欄には「学年」のところに入れたものと同じ数字を入れる。そして、残りの2桁の数字は、学生番号の右から「3番目,2番目」の数を入れる。例えば、2006年度入学で、学生番号が0611300789の時は、この「番号」のところは678となる。

留学生の場合： 左端の欄には「学年」のところに入れたものと同じ数字を入れる。真ん中の欄には「9」を入れる。右端の欄には、学生番号の右から「2番目」の数を入れる。例えば、2006年度入学で、学生番号が0611308023の時は、この「番号」のところは692となる。

(5) 解答欄の1~10すなわち、以下の欄に学生番号を記入すること。

(6) 問題の解答欄は、12番から記入する。従って、11番の解答欄には何もマークしないこと。

(7) 解答欄にマークする数字は「選択肢」の対応する番号を記入すること。例えば の解答が a_3 であるとき、選択肢の23が a_3 なので(選択肢参照)、23をマーク、即ち に2を に3をマークすること。

(8) ただし正解が選択肢にない場合には、その解答欄全てに g をマークすること。

問 題

以下を通じて n は 2 以上の自然数とする。

- 1 $w = f(z)$ を $z = a$ のまわりでテーラー級数展開することを考える。

$$f(z) = a_0 + a_1(z - a) + \cdots + a_n(z - a)^n + \cdots \quad (1)$$

と展開されているとき z に a を代入して $f(a) = \boxed{12}\boxed{13}$ を得る。式 (1) の両辺を z で微分すると

$$f'(z) = \boxed{14}\boxed{15} + \boxed{16}\boxed{17}(z - a) + \cdots + \boxed{18}\boxed{19}(z - a)^{n-1} + \cdots \quad (2)$$

となるので, (2) 式に $z = a$ を代入して $f'(a) = \boxed{20}\boxed{21}$ を得る。 n 回微分して $z = a$ を代入することにより $f^{(n)}(a) = \boxed{22}\boxed{23}$ を得る。このように n 次導関数が求まればテーラー級数の係数 a_n を決定することができる。

$w = f(z) = \log(z + 1)$ を考える。 $f'(z) = \boxed{24}\boxed{25}$ である。 n 回微分すると $f^{(n)}(z) = \boxed{26}\boxed{27}$ となる。よって $z = 0$ でテーラー級数展開すると

$$\log(z + 1) = \boxed{28}\boxed{29} + \boxed{30}\boxed{31}z + \cdots + \boxed{32}\boxed{33}z^n + \cdots$$

となる。

- 2 ρ_1 は実数, ρ_2 を実数または無限大とする。関数 $w = f(z)$ が $\rho_1 < |z - a| < \rho_2$ で正則であるとき, この領域で

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z - a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - a} + a_0 + a_1(z - a) + \cdots + a_n(z - a)^n + \cdots$$

という形で表示できる。これをローラン展開という。同じ関数でも展開する場所で形は変わる。

$w = f(z) = \frac{1}{z(1 - z)}$ を $0 < |z - 0| < 1$ で考える。

$$\frac{1}{z(1 - z)} = \frac{1}{z} + \boxed{34}\boxed{35}$$

と部分分数に展開できる。 $0 < |z - 0| < 1$ では

$$\boxed{34}\boxed{35} = \boxed{36}\boxed{37} + \boxed{38}\boxed{39}z + \cdots + \boxed{40}\boxed{41}z^n + \cdots \quad (3)$$

とテーラー展開できるので

$$f(z) = \cdots + \boxed{42}\boxed{43}\frac{1}{z^n} + \cdots + \boxed{44}\boxed{45}\frac{1}{z} + \boxed{46}\boxed{47} + \boxed{48}\boxed{49}z + \cdots + \boxed{50}\boxed{51}z^n + \cdots$$

とローラン展開できる。

次に $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ を $1 < |z-0|$ でローラン展開する。(3) 式は $1 < |z-0|$ では収束しない。 $1 < |z-0|$ では

$$\boxed{34} \boxed{35} = \cdots + \boxed{52} \boxed{53} \frac{1}{z^n} + \cdots + \boxed{54} \boxed{55} \frac{1}{z} + \boxed{56} \boxed{57} + \boxed{58} \boxed{59} z + \cdots + \boxed{60} \boxed{61} z^n + \cdots$$

とローラン展開できるので、

$$f(z) = \cdots + \boxed{62} \boxed{63} \frac{1}{z^n} + \cdots + \boxed{64} \boxed{65} \frac{1}{z} + \boxed{66} \boxed{67} + \boxed{68} \boxed{69} z + \cdots + \boxed{70} \boxed{71} z^n + \cdots$$

とローラン展開できる。

3 $w = f(z) = z \sin \frac{1}{z}$ を $0 < |z-0|$ でローラン展開しよう。 $\sin z$ を $z=0$ でテーラー展開すると

$$\sin z = \boxed{72} \boxed{73} + \boxed{74} \boxed{75} z + \cdots + \boxed{76} \boxed{77} z^{2n-1} + \cdots$$

となるので

$$f(z) = \cdots + \boxed{78} \boxed{79} \frac{1}{z^{2n}} + \cdots + \boxed{80} \boxed{81} \frac{1}{z} + \boxed{82} \boxed{83} + \boxed{84} \boxed{85} z + \cdots + \boxed{86} \boxed{87} z^{2n} + \cdots$$

とローラン展開できる。

選 拔 題

00: 0	01: 1	02: 2	03: 3	04: 4
05: 5	06: 6	07: 7	08: 8	09: 9
10: 10	11: -1	12: -2	13: -3	14: -4
15: -5	16: -6	17: -7	18: -8	19: -9
20: -10	21: a_1	22: a_2	23: a_3	24: a_4
25: a_5	26: $2a_2$	27: $3a_3$	28: $6a_3$	29: $(n-1)a_{n-1}$
30: $(n-1)!a_{n-1}$	31: $\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}$	32: $\frac{a_{n-1}}{n-1}$	33: na_{n-1}	34: na_n
35: $n!a_n$	36: $\frac{a_n}{n!}$	37: $\frac{a_n}{n}$	38: $(n+1)a_n$	39: $z-1$
40: $1-z$	41: $z+1$	42: $-(z+1)$	43: $\frac{1}{1-z}$	44: $\frac{1}{1+z}$
45: $-\frac{1}{1-z}$	46: $-\frac{1}{1+z}$	47: $\frac{1}{(1+z)^n}$	48: $\frac{1}{(1-z)^n}$	49: $\frac{1}{(1+z)^n}$
50: $\frac{n!}{(1-z)^n}$	51: $\frac{(-1)^n}{(1+z)^n}$	52: $\frac{(-1)^n}{(1-z)^n}$	53: $\frac{(-1)^n n!}{(1+z)^n}$	54: $\frac{(-1)^n n!}{(1-z)^n}$
55: $\frac{(-1)^{n+1} n!}{(1+z)^n}$	56: $\frac{(-1)^{n+1} n!}{(1-z)^n}$	57: $\frac{(-1)^n (n-1)!}{(1+z)^n}$	58: $\frac{(-1)^n (n-1)!}{(1-z)^n}$	59: n
60: $n-1$	61: $n+1$	62: $(-1)^n n$	63: $(-1)^n (n-1)$	64: $(-1)^n (n+1)$
65: $(-1)^{n+1} n$	66: $(-1)^{n+1} (n-1)$	67: $(-1)^{n+1} (n+1)$	68: $n!$	69: $(n-1)!$
70: $(n+1)!$	71: $\frac{1}{n}$	72: $\frac{1}{n-1}$	73: $\frac{1}{n+1}$	74: $\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}$
75: $\frac{(-1)^n}{n-1}$	76: $\frac{(-1)^n}{n+1}$	77: $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$	78: $\frac{(-1)^{n+1}}{n-1}$	79: $\frac{n}{(-1)^{n+1}}$
80: $\frac{1}{n!}$	81: $\frac{1}{(n-1)!}$	82: $\frac{1}{(n+1)!}$	83: $(-1)^n \frac{1}{n!}$	84: $\frac{(-1)^n}{(n-1)!}$
85: $\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$	86: $\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$	87: $\frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!}$	88: $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$	89: $\frac{1}{(2n)!}$
90: $\frac{1}{(2n-1)!}$	91: $\frac{(-1)^n}{(2n)!}$	92: $\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}$	93: $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$	94: $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}$