工業数学II 第2回試験問題解答

2008–1–16　　河野

箱の中は $\boxed{\text{解答 (選択肢)}}$ である。

1 このテストの問題が A の場合は 0 に，B の場合は 1 を $\boxed{12}$ にマークすること。問題は A，B の 2 種類あったがほとんどが A なので，ここでは A の問題と解答をのせる。

2 積分 $I = \displaystyle\int_C \frac{1}{z-a} dz$ を計算しよう。ただし C は a を中心とする半径 r の円とする。

$z(t) = a + re^{it}$ とおく。ただし $p = \boxed{0(00)}$，$q = \boxed{2\pi(44)}$ とするとき t は $p \leqq t \leqq q$ の範囲を動くものとする。このとき

$$\frac{dz(t)}{dt} = \boxed{ire^{it}(60)}$$

なので

$$\int_C \frac{1}{z-a} dz = \int_p^q \frac{1}{\boxed{re^{it}(55)}} \frac{dz(t)}{dt} dt = \boxed{2i\pi(54)}$$

となる。

3 関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C 上とその内部で正則とする。a が C の内部にあれば，自然数 n に対し

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

が成立する。

これを用いて $I = \displaystyle\int_C \frac{z^2}{(z-1)^3} dz$ を計算しよう。ただし C は原点を中心とする半径 2 の円とする。$n = \boxed{2(02)}$，$f(z) = \boxed{z^2(65)}$，$a = \boxed{1(01)}$ とおくと $f^{(n)}(z) = \boxed{2(02)}$ なので

$$I = \boxed{i\pi(52)} f^{(n)}(a) = \boxed{2i\pi(54)}$$

を得る。

4

$$I = \int_C \frac{e^z}{(z-3)(z-1)^2} dz$$

を留数定理を用いて求めよう。ただし，C は $|z-2| = 2$ とする。

$f(z)=\dfrac{e^z}{(z-3)(z-1)^2}$ とおく。円 C の内部にある $f(z)$ の特異点は p と q である。$p<q$ とすると，$p=\boxed{1(01)}$，$q=\boxed{3(03)}$ である。$f(z)$ を p の回りでローラン展開すると

$$f(z)=\boxed{-\frac{1}{2}e(73)}\frac{1}{(z-p)^2}+\boxed{-\frac{3}{4}e(70)}\frac{1}{z-p}+\boxed{-\frac{5}{8}e(72)}+\cdots$$

となるので留数は $\mathrm{Res}(p)=\boxed{-\dfrac{3}{4}e(70)}$ である。$f(z)$ を q の回りでローラン展開すると

$$f(z)=\boxed{0(00)}\frac{1}{(z-q)^2}+\boxed{\frac{1}{4}e^3(82)}\frac{1}{z-q}+\boxed{0(00)}+\cdots$$

となるので留数は $\mathrm{Res}(q)=\boxed{\dfrac{1}{4}e^3(82)}$ である。

よって

$$I=\int_C\frac{e^z}{(z-3)(z-1)^2}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(p)+2\pi i\,\mathrm{Res}(q)=\boxed{\frac{\pi i(e^3-3e)}{2}(\mathrm{gg})}$$

となる。

5

$$I=\int_C z^3\cos\frac{1}{z}dz$$

を留数定理を用いて求めよう。ただし，C は $|z-i|=\sqrt{3}$ とする。

$f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z}$ とおく。円 C の内部にある $f(z)$ の特異点を p とすると $p=\boxed{0(00)}$ である。

$$f(z)=\cdots+\boxed{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}(94)}\frac{1}{(z-p)^{2n-1}}+\cdots+\boxed{\frac{1}{24}(28)}\frac{1}{z-p}+\cdots$$

となるので留数は $\mathrm{Res}(p)=\boxed{\dfrac{1}{24}(28)}$ となる。

よって

$$I=\int_C z^3\cos\frac{1}{z}dz=\boxed{\frac{i\pi}{12}(46)}$$

となる。