工業数学 II 第 2 回試験　　2008–1–16　　河野

解答用紙 記入方法

(1) 科目名には「工業数学 II 第 2 回」と書くこと。

(2) 学年欄は西暦入学年度下 1 桁をマークすること。

2006 年度入学	→ **6** ,	2005 年度入学	→ **5** ,
2004 年度入学	→ **4** ,	2003 年度入学	→ **3** ,
2002 年度入学	→ **2** ,	2001 年度入学	→ **1** ,
2000 年度入学	→ **0** ,	1999 年度入学	→ **9**

(3) クラス欄は次に従ってマークすること。

機械システム	→ **11** ,	電気電子	→ **12** ,	情報システム	→ **13** ,
化学システム	→ **14** ,	機能材料	→ **15** ,	土木開発	→ **16**

(4) 番号欄は次に従ってマークすること。

留学生以外の学生の場合： ここは 3 桁の数字を入れることになっているが，左端の欄には「学年」のところに入れたものと同じ数字を入れる。そして，残りの 2 桁の数字は，学生番号の **右から** 「3 番目,2 番目」の数を入れる。例えば，2006 年度入学で，学生番号が **0611300789** の時は，この「番号」のところは **678** となる。

留学生の場合： 左端の欄には「学年」のところに入れたものと同じ数字を入れる。真ん中の欄には,「9」を入れる。右端の欄には，学生番号の **右から** 「2 番目」の数を入れる。例えば，2006 年度入学で，学生番号が **0611308023** の時は，この「番号」のところは **692** となる。

(5) 解答欄の 1〜10 すなわち，以下の欄に学生番号を記入すること。

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}\boxed{9}\boxed{10}$

(6) 問題の解答欄は，12 番から記入する。従って，11 番の解答欄には何もマークしないこと。

(7) 解答欄にマークする数字は「選択肢」の対応する番号を記入すること。例えば $\boxed{35}\boxed{36}$ の解答が -10 であるとき，選択肢の 20 が -10 なので (選択肢参照)，20 をマーク，即ち $\boxed{35}$ に 2 を $\boxed{36}$ に 0 をマークすること。

(8) ただし**正解が選択肢にない場合**には，その解答欄全てに g をマークすること。

選択肢

00: 0	01: 1	02: 2	03: 3	04: 4
05: 5	06: 6	07: 7	08: 8	09: 9
10: 10	11: -1	12: -2	13: -3	14: -4
15: -5	16: -6	17: -7	18: -8	19: -9
20: -10	21: $-\frac{3}{4}$	22: $-\frac{5}{8}$	23: $-\frac{1}{2}$	24: $-\frac{1}{3}$
25: $-\frac{1}{6}$	26: $-\frac{1}{12}$	27: $-\frac{1}{24}$	28: $\frac{1}{24}$	29: $\frac{1}{12}$
30: $\frac{1}{6}$	31: $\frac{1}{3}$	32: $\frac{1}{2}$	33: $\frac{5}{8}$	34: $\frac{3}{4}$
35: $\frac{\pi}{24}$	36: $\frac{\pi}{12}$	37: $\frac{\pi}{6}$	38: $\frac{\pi}{4}$	39: $\frac{\pi}{3}$
40: $\frac{\pi}{2}$	41: $\frac{2\pi}{3}$	42: π	43: $\frac{3\pi}{2}$	44: 2π
45: $\frac{i\pi}{24}$	46: $\frac{i\pi}{12}$	47: $\frac{i\pi}{6}$	48: $\frac{i\pi}{4}$	49: $\frac{i\pi}{3}$
50: $\frac{i\pi}{2}$	51: $\frac{2i\pi}{3}$	52: $i\pi$	53: $\frac{3i\pi}{2}$	54: $2i\pi$
55: re^{it}	56: r^2e^{i2t}	57: r^3e^{i3t}	58: re^{-it}	59: r^2e^{-i2t}
60: ire^{it}	61: ir^2e^{i2t}	62: ir^3e^{i3t}	63: ire^{-it}	64: ir^2e^{-i2t}
65: z^2	66: z^2+1	67: $(z-1)^3$	68: z^2+4	69: z^3
70: $-\frac{3e}{4}$	71: $-\frac{5e}{8}$	72: $-\frac{5e^3}{8}$	73: $-\frac{e}{2}$	74: $-\frac{e^2}{2}$
75: $-\frac{e}{4}$	76: $-\frac{e^3}{4}$	77: $-\frac{e}{12}$	78: $-\frac{e^3}{12}$	79: $\frac{e}{12}$
80: $\frac{e^3}{12}$	81: $\frac{e}{4}$	82: $\frac{e^3}{4}$	83: $\frac{e}{2}$	84: $\frac{e^2}{2}$
85: $-\frac{e}{2}$	86: $\frac{e}{2}$	87: $\frac{5e}{8}$	88: $\frac{5e^3}{8}$	89: $\frac{3e}{4}$
90: $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-2)!}$	91: $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}$	92: $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$	93: $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$	94: $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}$
95: $\frac{(-1)^{n}}{(2n-2)!}$	96: $\frac{(-1)^{n}}{(2n-1)!}$	97: $\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}$	98: $\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}$	99: $\frac{(-1)^{n}}{(2n+2)!}$

問　題 A

以下を通じて n は2以上の自然数とする。また閉曲線の向きは領域を左に見る方向とする

$\boxed{\textbf{1}}$ このテストの問題がAの場合は0に，Bの場合は1を $\boxed{12}$ にマークすること。

$\boxed{\textbf{2}}$ 積分 $I = \displaystyle\int_C \frac{1}{z-a}dz$ を計算しよう。ただし C は a を中心とする半径 r の円とする。

$z(t) = a + re^{it}$ とおく。ただし $p = \boxed{13}\boxed{14}$，$q = \boxed{15}\boxed{16}$ とするとき t は $p \leqq t \leqq q$ の範囲を動くものとする。このとき

$$\frac{dz(t)}{dt} = \boxed{17}\boxed{18}$$

なので

$$\int_C \frac{1}{z-a}dz = \int_p^q \frac{1}{\boxed{19}\boxed{20}}\frac{dz(t)}{dt}dt = \boxed{21}\boxed{22}$$

となる。

$\boxed{\textbf{3}}$ 関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C 上とその内部で正則とする。a が C の内部にあれば，自然数 n に対し

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

が成立する。

これを用いて $I = \displaystyle\int_C \frac{z^2}{(z-1)^3}dz$ を計算しよう。ただし C は原点を中心とする半径2の円とする。$n = \boxed{23}\boxed{24}$，$f(z) = \boxed{25}\boxed{26}$，$a = \boxed{27}\boxed{28}$ とおくと $f^{(n)}(z) = \boxed{29}\boxed{30}$ なので

$$I = \boxed{31}\boxed{32}f^{(n)}(a) = \boxed{33}\boxed{34}$$

を得る。

$\boxed{\textbf{4}}$

$$I = \int_C \frac{e^z}{(z-3)(z-1)^2}dz$$

を留数定理を用いて求めよう。ただし，C は $|z-2| = 2$ とする。

$f(z) = \dfrac{e^z}{(z-3)(z-1)^2}$ とおく。円 C の内部にある $f(z)$ の特異点は p と q である。$p < q$ とすると，$p = \boxed{35}\boxed{36}$，$q = \boxed{37}\boxed{38}$ である。$f(z)$ を p の回りでローラン展開すると

$$f(z) = \boxed{39}\boxed{40}\frac{1}{(z-p)^2} + \boxed{41}\boxed{42}\frac{1}{z-p} + \boxed{43}\boxed{44} + \cdots$$

となるので留数は $\mathrm{Res}(p) = \boxed{45}\boxed{46}$ である。$f(z)$ を q の回りでローラン展開すると

$$f(z) = \boxed{47}\boxed{48}\frac{1}{(z-q)^2} + \boxed{49}\boxed{50}\frac{1}{z-q} + \boxed{51}\boxed{52} + \cdots$$

となるので留数は $\mathrm{Res}(q) = \boxed{53}\boxed{54}$ である。

よって

$$I = \int_C \frac{e^z}{(z-3)(z-1)^2} dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(p) + 2\pi i\,\mathrm{Res}(q) = \boxed{55}\boxed{56}$$

となる。

5

$$I = \int_C z^3 \cos\frac{1}{z} dz$$

を留数定理を用いて求めよう。ただし，C は $|z-i| = \sqrt{3}$ とする。

$f(z) = z^3 \cos\dfrac{1}{z}$ とおく。円 C の内部にある $f(z)$ の特異点を p とすると $p = \boxed{57}\boxed{58}$ である。

$$f(z) = \cdots + \boxed{59}\boxed{60}\frac{1}{(z-p)^{2n-1}} + \cdots + \boxed{61}\boxed{62}\frac{1}{z-p} + \cdots$$

となるので留数は $\mathrm{Res}(p) = \boxed{63}\boxed{64}$ となる。

よって

$$I = \int_C z^3 \cos\frac{1}{z} dz = \boxed{65}\boxed{66}$$

となる。