工業数学 II 第 3 回試験　　2008–1–16　　河野

解答用紙 記入方法

(1) 科目名には「工業数学 II 第 3 回」と書くこと。

(2) 学年欄は西暦入学年度下 1 桁をマークすること。

2006 年度入学 → **6**， 2005 年度入学 → **5**，
2004 年度入学 → **4**， 2003 年度入学 → **3**，
2002 年度入学 → **2**， 2001 年度入学 → **1**，
2000 年度入学 → **0**， 1999 年度入学 → **9**

(3) クラス欄は次に従ってマークすること。

機械システム → **11**， 電気電子 → **12**， 情報システム → **13**，
化学システム → **14**， 機能材料 → **15**， 土木開発 → **16**

(4) 番号欄は次に従ってマークすること。

留学生以外の学生の場合： ここは 3 桁の数字を入れることになっているが，左端の欄には「学年」のところに入れたものと同じ数字を入れる。そして，残りの 2 桁の数字は，学生番号の **右から** 「3 番目,2 番目」の数を入れる。例えば，2006 年度入学で，学生番号が **0611300789** の時は，この「番号」のところは **678** となる。

留学生の場合： 左端の欄には「学年」のところに入れたものと同じ数字を入れる。真ん中の欄には,「9」を入れる。右端の欄には，学生番号の **右から** 「2 番目」の数を入れる。例えば，2006 年度入学で，学生番号が **0611308023** の時は，この「番号」のところは **692** となる。

(5) 解答欄の 1〜10 すなわち，以下の欄に学生番号を記入すること。

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}\boxed{9}\boxed{10}$

(6) 問題の解答欄は，12 番から記入する。従って，11 番の解答欄には何もマークしないこと。

(7) 解答欄にマークする数字は「選択肢」の対応する番号を記入すること。例えば $\boxed{35}\boxed{36}$ の解答が -10 であるとき，選択肢の 20 が -10 なので (選択肢参照)，20 をマーク，即ち $\boxed{35}$ に 2 を $\boxed{36}$ に 0 をマークすること。

(8) ただし**正解が選択肢にない場合**には，その解答欄全てに g をマークすること。

選択肢

00: 0	01: 1	02: 2	03: 3	04: 4
05: 5	06: 6	07: 7	08: 8	09: 9
10: 10	11: -1	12: -2	13: -3	14: -4
15: -5	16: -6	17: -7	18: -8	19: -9
20: -10	21: $\frac{1}{2}$	22: $\frac{1}{3}$	23: $\frac{1}{12}$	24: $\frac{1}{16}$
25: $\frac{1}{32}$	26: $\frac{2}{9}$	27: $\frac{3}{256}$	28: $-\frac{1}{2}$	29: $-\frac{1}{3}$
30: $-\frac{1}{12}$	31: $-\frac{1}{16}$	32: $-\frac{1}{32}$	33: $-\frac{2}{9}$	34: $-\frac{3}{256}$
35: $\frac{\pi}{32}$	36: $\frac{\pi}{16}$	37: $\frac{\pi}{12}$	38: $\frac{\pi}{6}$	39: $\frac{\pi}{4}$
40: $\frac{\pi}{3}$	41: $\frac{\pi}{2}$	42: $\frac{2\pi}{3}$	43: π	44: $\frac{3\pi}{2}$
45: i	46: $2i$	47: $3i$	48: $\frac{i}{2}$	49: $\frac{i}{8}$
50: $\frac{i}{16}$	51: $\frac{i}{32}$	52: $-i$	53: $-2i$	54: $-3i$
55: $-\frac{i}{2}$	56: $-\frac{i}{8}$	57: $-\frac{i}{16}$	58: $-\frac{i}{32}$	59: $\frac{i\pi}{6}$
60: $\frac{i\pi}{4}$	61: $\frac{i\pi}{3}$	62: $\frac{i\pi}{2}$	63: $\frac{2i\pi}{3}$	64: $i\pi$
65: $e^{i\theta}$	66: $e^{i2\theta}$	67: $e^{i3\theta}$	68: $e^{-i\theta}$	69: $e^{-i2\theta}$
70: $ie^{i\theta}$	71: $ie^{i2\theta}$	72: $ie^{i3\theta}$	73: $ie^{-i\theta}$	74: $ie^{-i2\theta}$
75: z	76: $2z$	77: $\frac{1}{z}$	78: $4z+5$	79: $5z+4$
80: z^2+5z+1	81: z^2+z+1	82: $5z^2+2z+5$	83: $2z^2+5z+2$	84: z^2+4
85: R	86: sR	87: $\frac{R}{s}$	88: $\frac{s}{R}$	89: R^2
90: R^4	91: $(R^2-4)^2$	92: $(R^2+4)^2$	93: $(R^2+1)^2$	94: $(R^2-1)^2$
95: πR	96: πR^2	97: $\pi i R$	98: $\pi(R^2-4)$	99: $\pi(R^2-1)^2$

$\boxed{\text{問　　題 A}}$

以下を通じて閉曲線の向きは領域を左に見る方向とする
箱の中は$\boxed{\text{解答 (選択肢)}}$である。

$\boxed{\mathbf{1}}$ このテストの問題が A の場合は 0 に，B の場合は 1 を $\boxed{12}$ にマークすること。

$\boxed{\mathbf{2}}$ $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos\theta} d\theta$ を複素積分を利用して求める。$z = hakoae^{i\theta}(65)$ とおくと

$$\frac{1}{z} = e^{-i\theta}$$

であり，オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\boxed{z\,(75)} + \frac{1}{\boxed{z\,(75)}}\right)$$

が成立する。

$$\frac{dz}{d\theta} = \boxed{ie^{i\theta}\,(70)}$$

なので，z に関する複素積分に変換する。

$$\frac{1}{5+4\cos\theta} = \frac{z}{\boxed{2z^2+5z+2\,(83)}}$$

なので

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos\theta} d\theta = \frac{1}{i}\int_C \frac{\boxed{1\,(01)}}{\boxed{2z^2+5z+2\,(83)}} dz$$

となる。ただし，C は半径 1 の円である。

$$\boxed{2z^2+5z+2\,(83)} = 2(z-\alpha)(z-\beta)$$

なので関数 $f(z) = \dfrac{1}{\boxed{2z^2+5z+2\,(83)}}$ の特異点は $z = \alpha = \boxed{-\frac{1}{2}\,(28)}$ および $z = \beta = \boxed{-2\,(12)}$ であるが，C の内部にあるのは $z = \alpha = \boxed{-\frac{1}{2}\,(28)}$ である。よって

$$\int_C \frac{1}{\boxed{2z^2+5z+2\,(83)}} dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(\alpha)$$

となる。$f(z) = \dfrac{1}{\boxed{2z^2+5z+2\,(83)}} = \dfrac{1}{2(z-\alpha)(z-\beta)}$ なので，$f(z)$ は $z=\alpha$ で

$$f(z) = \boxed{\frac{1}{3}\,(22)}\,\frac{1}{z-\alpha} + \boxed{-\frac{2}{9}\,(33)} + a_1(z-\alpha) + \cdots$$

とローラン展開できる。以上により

$$\mathrm{Res}(\alpha) = \boxed{\frac{1}{3}\,(22)}$$

となる。よって

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+\cos\theta}d\theta = \boxed{\frac{2\pi}{3}\,(42)}$$

を得る。

3 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}dx$ を複素積分を利用して求める。$R > 2$ とするとき，$\Gamma = \{Re^{it} \,|\, 0 \leqq t \leqq \pi\}$，$L = \{x+0i \,|\, -R \leqq x \leqq R\}$，$C = \Gamma \cup L$ とおく。ただし，L の向きは $-R$ から R に向かう向き，Γ の向きは R から $-R$ に向かう向き，C の向きは L と Γ の向きから決まる向きとする。

$f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$ とおくとき，

$$\int_C f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz + \int_L f(z)dz \qquad (1)$$

が成立している。

s を長さによるパラメータとする。Γ を s を用いて表示すると

$$\Gamma = \left\{ \boxed{R\,(85)}\, e^{i\boxed{\frac{s}{R}\,(88)}} \,\middle|\, 0 \leqq s \leqq \pi R \right\}$$

となる。このとき

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqq \int_\Gamma \left|f(z)\right|ds = \int_0^{\pi R}\left|f(z)\right|ds$$

が成立している。$z \in \Gamma$ のとき $|z| = R$ であり，

$$\left|f(z)\right| = \left|\frac{1}{(z^2+4)^2}\right| \leqq \frac{1}{\boxed{\left(R^2-4\right)^2\,(91)}}$$

が成立する。よって

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqq \int_0^{\pi R} \frac{1}{\boxed{\left(R^2-4\right)^2\ (91)}}ds = \frac{\boxed{\pi R\,(95)}}{\boxed{\left(R^2-4\right)^2\ (91)}}$$

が得られる。これより

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = \boxed{0\,(00)}$$

が示される。

次に $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求める。$f(z)$ の特異点は $z=\alpha=\boxed{2i\,(46)}$ および $z=\beta=\boxed{-2i\,(53)}$ である。C の内部にある特異点は $\alpha=\boxed{2i\,(46)}$ である。よって

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(\alpha)$$

が成立する。$f(z)$ は $z=\alpha$ で

$$f(z) = \boxed{-\frac{1}{16}\,(31)}\frac{1}{(z-\alpha)^2} + \boxed{-\frac{i}{32}\,(58)}\frac{1}{z-\alpha} + \boxed{\frac{3}{256}\,(27)} + \cdots$$

とローラン展開できる。よって留数は $\mathrm{Res}(\alpha) = \boxed{-\frac{i}{32}\,(58)}$ である。

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(\alpha) = \boxed{\frac{\pi}{16}\,(36)}$$

を (1) に代入し $R\to\infty$ とすると $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_L f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ なので

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+4)^2}dx = \boxed{\frac{\pi}{16}\,(36)}$$

を得る。