

解答用紙 記入方法

- (1) 科目名には「工業数学Ⅱ第3回」と書くこと。
(2) 学年欄は西暦入学年度下1桁をマークすること。

2006年度入学 → 6, 2005年度入学 → 5,
2004年度入学 → 4, 2003年度入学 → 3,
2002年度入学 → 2, 2001年度入学 → 1,
2000年度入学 → 0, 1999年度入学 → 9

- (3) クラス欄は次に従ってマークすること。

機械システム → 11, 電気電子 → 12, 情報システム → 13,
化学システム → 14, 機能材料 → 15, 土木開発 → 16

- (4) 番号欄は次に従ってマークすること。

留学生以外の学生の場合：ここは3桁の数字を入れることになっているが、左端の欄には「学年」のところに入れたものと同じ数字を入れる。そして、残りの2桁の数字は、学生番号の右から「3番目,2番目」の数を入れる。例えば、2006年度入学で、学生番号が0611300789の時は、この「番号」のところは678となる。

留学生の場合：左端の欄には「学年」のところに入れたものと同じ数字を入れる。真ん中の欄には「9」を入れる。右端の欄には、学生番号の右から「2番目」の数を入れる。例えば、2006年度入学で、学生番号が0611308023の時は、この「番号」のところは692となる。

- (5) 解答欄の1~10すなわち、以下の欄に学生番号を記入すること。

- (6) 問題の解答欄は、12番から記入する。従って、11番の解答欄には何もマークしないこと。
(7) 解答欄にマークする数字は「選択肢」の対応する番号を記入すること。例えば の解答が-10であるとき、選択肢の20が-10なので(選択肢参照)、20をマーク、即ち に2を に0をマークすること。
(8) ただし正解が選択肢にない場合には、その解答欄全てに g をマークすること。

選 択 肢

00: 0	01: 1	02: 2	03: 3	04: 4
05: 5	06: 6	07: 7	08: 8	09: 9
10: 10	11: -1	12: -2	13: -3	14: -4
15: -5	16: -6	17: -7	18: -8	19: -9
20: -10	21: $\frac{1}{2}$	22: $\frac{1}{3}$	23: $\frac{1}{12}$	24: $\frac{1}{16}$
25: $\frac{1}{32}$	26: $\frac{2}{9}$	27: $\frac{3}{256}$	28: $-\frac{1}{2}$	29: $-\frac{1}{3}$
30: $-\frac{1}{12}$	31: $-\frac{1}{16}$	32: $-\frac{1}{32}$	33: $-\frac{2}{9}$	34: $-\frac{3}{256}$
35: $\frac{\pi}{32}$	36: $\frac{\pi}{16}$	37: $\frac{\pi}{12}$	38: $\frac{\pi}{6}$	39: $\frac{\pi}{4}$
40: $\frac{\pi}{3}$	41: $\frac{\pi}{2}$	42: $\frac{2\pi}{3}$	43: π	44: $\frac{3\pi}{2}$
45: i	46: $2i$	47: $3i$	48: $\frac{i}{2}$	49: $\frac{i}{8}$
50: $\frac{i}{16}$	51: $\frac{i}{32}$	52: $-i$	53: $-2i$	54: $-3i$
55: $-\frac{i}{2}$	56: $-\frac{i}{8}$	57: $-\frac{i}{16}$	58: $-\frac{i}{32}$	59: $\frac{i\pi}{6}$
60: $\frac{i\pi}{4}$	61: $\frac{i\pi}{3}$	62: $\frac{i\pi}{2}$	63: $\frac{2i\pi}{3}$	64: $i\pi$
65: $e^{i\theta}$	66: $e^{i2\theta}$	67: $e^{i3\theta}$	68: $e^{-i\theta}$	69: $e^{-i2\theta}$
70: $ie^{i\theta}$	71: $ie^{i2\theta}$	72: $ie^{i3\theta}$	73: $ie^{-i\theta}$	74: $ie^{-i2\theta}$
75: z	76: $2z$	77: $\frac{1}{z}$	78: $4z + 5$	79: $5z + 4$
80: $z^2 + 5z + 1$	81: $z^2 + z + 1$	82: $5z^2 + 2z + 5$	83: $2z^2 + 5z + 2$	84: $z^2 + 4$
85: R	86: sR	87: $\frac{R}{s}$	88: $\frac{s}{R}$	89: R^2
90: R^4	91: $(R^2 - 4)^2$	92: $(R^2 + 4)^2$	93: $(R^2 + 1)^2$	94: $(R^2 - 1)^2$
95: πR	96: πR^2	97: πiR	98: $\pi(R^2 - 4)$	99: $\pi(R^2 - 1)^2$

問 題 A

以下を通じて閉曲線の向きは領域を左に見る方向とする

1 このテストの問題が A の場合は 0 に、B の場合は 1 を 12 にマークすること。

2 $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos \theta} d\theta$ を複素積分を利用して求める。 $z =$ 13 14 とおくと

$$\frac{1}{z} = e^{-i\theta}$$

であり、オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ より

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{15}{16} + \frac{1}{17 \cdot 18} \right)$$

が成立する。

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{19}{20}$$

なので、 z に関する複素積分に変換する。

$$\frac{1}{5 + 4 \cos \theta} = \frac{z}{21 \cdot 22}$$

なので

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = \frac{1}{i} \int_C \frac{23 \cdot 24}{21 \cdot 22} dz$$

となる。ただし、 C は半径 1 の円である。

$$21 \cdot 22 = 2(z - \alpha)(z - \beta)$$

なので関数 $f(z) = \frac{1}{21 \cdot 22}$ の特異点は $z = \alpha = 25 \cdot 26$ および $z = \beta = 27 \cdot 28$ であるが、

C の内部にあるのは $z = \alpha = 25 \cdot 26$ である。よって

$$\int_C \frac{1}{21 \cdot 22} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(\alpha)$$

となる。 $f(z) = \frac{1}{\boxed{21}\boxed{22}} = \frac{1}{2(z-\alpha)(z-\beta)}$ なので、 $f(z)$ は $z = \alpha$ で

$$f(z) = \boxed{29}\boxed{30} \frac{1}{z-\alpha} + \boxed{31}\boxed{32} + a_1(z-\alpha) + \dots$$

とローラン展開できる。以上により

$$\text{Res}(\alpha) = \boxed{33}\boxed{34}$$

となる。よって

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + \cos \theta} d\theta = \boxed{35}\boxed{36}$$

を得る。

- 3** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2} dx$ を複素積分を利用して求める。 $R > 2$ とするとき、 $\Gamma = \{Re^{it} \mid 0 \leq t \leq \pi\}$, $L = \{x+0i \mid -R \leq x \leq R\}$, $C = \Gamma \cup L$ とおく。ただし、 L の向きは $-R$ から R に向かう向き、 Γ の向きは R から $-R$ に向かう向き、 C の向きは L と Γ の向きから決まる向きとする。

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2} \text{ とおくとき、}$$

$$\int_C f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_L f(z) dz \tag{1}$$

が成立している。

s を長さによるパラメータとする。 Γ を s を用いて表示すると

$$\Gamma = \left\{ \boxed{37}\boxed{38} e^{i\boxed{39}\boxed{40}} \mid 0 \leq s \leq \pi R \right\}$$

となる。このとき

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| ds = \int_0^{\pi R} |f(z)| ds$$

が成立している。 $z \in \Gamma$ のとき $|z| = R$ であり、

$$\left| f(z) \right| = \left| \frac{1}{(z^2+4)^2} \right| \leq \frac{1}{\boxed{41}\boxed{42}}$$

が成立する。よって

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_0^{\pi R} \frac{1}{\boxed{41}\boxed{42}} ds = \frac{\boxed{43}\boxed{44}}{\boxed{41}\boxed{42}}$$

が得られる。これより

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = \boxed{45} \boxed{46}$$

が示される。

次に $\int_C f(z) dz$ を求める。 $f(z)$ の特異点は $z = \alpha = \boxed{47} \boxed{48}$ および $z = \beta = \boxed{49} \boxed{50}$ である。 C の内部にある特異点は $\alpha = \boxed{47} \boxed{48}$ である。よって

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(\alpha)$$

が成立する。 $f(z)$ は $z = \alpha$ で

$$f(z) = \boxed{51} \boxed{52} \frac{1}{(z - \alpha)^2} + \boxed{53} \boxed{54} \frac{1}{z - \alpha} + \boxed{55} \boxed{56} + \dots$$

とローラン展開できる。よって留数は $\operatorname{Res}(\alpha) = \boxed{57} \boxed{58}$ である。

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(\alpha) = \boxed{59} \boxed{60}$$

を (1) に代入し $R \rightarrow \infty$ とすると $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_L f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ なので

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx = \boxed{61} \boxed{62}$$

を得る。