工業数学 II 第 4 回試験

2008–2–14　　河野

注意: ・答案は日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に，数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
・採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
・内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
・在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 関数 $y = f(z)$ が $z = a$ のまわりで

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

とローラン展開されているとする。a を中心とする半径 r の円を C とするとき,

$$I = \int_C f(z)dz$$

を計算することを考える。ただし，ローラン級数が項別積分可能なこと，即ち

$$\int_C f(z)dz = \cdots + \int_C \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \int_C \frac{a_{-1}}{z-a}dzdz + \int_C a_0 dz + \int_C a_1(z-a)dz + \cdots + \int_C a_n(z-a)^n dz + \cdots$$

となることは使用してよい。

(1) 自然数 n に対し $\displaystyle\int_C a_n(z-a)^n dz$ を計算せよ。

$z = a + re^{i\theta}$ とおく。ただし $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする。$\dfrac{dz}{d\theta} = ire^{i\theta}$ なので

$$\begin{aligned}\int_C a_n(z-a)^n dz &= \int_0^{2\pi} a_n \left(re^{i\theta}\right)^n \frac{dz}{d\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} a_n ir^{n+1}e^{i(n+1)\theta}d\theta \\ &= a_n ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}d\theta = a_n ir^{n+1}\left[\frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)}\right]_{\theta=0}^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

である。

(2) 2 以上の自然数 n に対し $\displaystyle\int_C \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}dz$ を計算せよ。

$z = a + re^{i\theta}$ とおく。ただし $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする。$\dfrac{dz}{d\theta} = ire^{i\theta}$ なので

$$\begin{aligned}\int_C \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{a_{-n}}{\left(re^{i\theta}\right)^n}\frac{dz}{d\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a_{-n}i}{r^{n-1}e^{i(n-1)\theta}}d\theta \\ &= \frac{a_{-n}i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta}d\theta = \frac{a_{-n}i}{r^{n-1}}\left[\frac{e^{-i(n-1)\theta}}{-i(n-1)}\right]_{\theta=0}^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

である。

(3) I を計算せよ。

$z = a + re^{i\theta}$ とおく。ただし $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする。$\dfrac{dz}{d\theta} = ire^{i\theta}$ なので

$$\int_C \frac{a_{-1}}{(z-a)}dz = \int_0^{2\pi} \frac{a_{-1}}{re^{i\theta}}ire^{i\theta}d\theta = a_{-1}i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i a_{-1}, \qquad \int_C a_0 dz = a_0 ir\int_0^{2\pi} e^{i\theta}d\theta = 0$$

なので

$$\begin{aligned}I &= \cdots + \int_C \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \int_C \frac{a_{-1}}{z-a}dzdz + \int_C a_0 dz + \int_C a_1(z-a)dz + \cdots + \int_C a_n(z-a)^n dz + \cdots \\ &= \cdots + 0 \cdots + 2\pi i a_{-1} + 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 2\pi i a_{-1}\end{aligned}$$

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

$\boxed{\mathbf{2}}$ $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos\theta}d\theta$ を複素積分を利用して求める。

(1) $z = e^{i\theta}$ とおいて，I を z に関する積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ の形に変形せよ。

$z = e^{i\theta}$ とおくと $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ であり，オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より $\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = \cos\theta$ が成立する。$\dfrac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz$ なので，z に関する複素積分に変換すると

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos\theta}d\theta = \int_C \frac{1}{5+4\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{d\theta}{dz}dz = \int_C \frac{1}{5+4\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{1}{iz}dz \qquad = \frac{1}{i}\int_C \frac{1}{2z^2+5z+2}dz$$

となる。ただし，C は半径 1 の円である。

(2) $f(z)$ の特異点の 1 つを a とする (特異点が複数ある場合 a として何を選んでもよい)。$f(z)$ を $z=a$ のまわりでローラン展開せよ。

特異点は $2z^2+5z+2 = (2z+1)(z+2) = 0$ の解なので $z = -\dfrac{1}{2}, -2$ である。$z = -\dfrac{1}{2}$ のまわりてローラン展開する。$f(z) = \dfrac{1}{2z^2+5z+2} = \dfrac{1}{(2z+1)(z+2)} = \dfrac{1}{z+\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2z+4}$ なので $g(z) = \dfrac{1}{2z+4}$ とおき，これを $z = -\dfrac{1}{2}$ のまわりでテーラー展開すると

$$g(z) = \frac{1}{3} - \frac{2}{9}\left(z+\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{27}\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(z+\frac{1}{2}\right)^n + \cdots$$

となる。よって $f(z)$ は

$$f(z) = \frac{1}{3}\frac{1}{z+\frac{1}{2}} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27}\left(z+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(z+\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$$

とローラン展開できる。

(3) I を求めよ。

(2) の結果より $\mathrm{Res}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$ である。また C 内の特異点は $z = -\dfrac{1}{2}$ のみなので留数定理より

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

となる。よって

$$I = \frac{1}{i}\int_C \frac{1}{2z^2+5z+2}dz = \frac{1}{i}2\pi i\frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$ を複素積分を利用して求める。$R > 1$ とするとき，$\Gamma = \left\{ Re^{it} \,\middle|\, 0 \leqq t \leqq \pi \right\}$，$L = \{ x + 0i \mid -R \leqq x \leqq R \}$，$C = \Gamma \cup L$ とおく。ただし，L の向きは $-R$ から R に向かう向き，Γ の向きは R から $-R$ に向かう向き，C の向きは L と Γ の向きから決まる向きとする。$f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ とおくとき，

$$\int_C f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz + \int_L f(z)dz$$

が成立している。

(1) $f(z)$ の特異点の 1 つを a とする (特異点が複数ある場合 a として何を選んでもよい)。$f(z)$ を $z = a$ のまわりでローラン展開せよ。

$z^2+1 = (z-i)(z+i) = 0$ より特異点は $z = i, -i$ である。$z = i$ のまわりでローラン展開を行う。$f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2} = \dfrac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$ なので $g(z) = \dfrac{1}{(z+i)^2}$ とおき $z = i$ のまわりでテーラー展開すると

$$g(z) = -\frac{1}{4} - \frac{i}{4}(z-i) + \frac{3}{16}(z-i)^2 + \cdots - \frac{ni^n}{4 \cdot 2^n}(z-i)^n + \cdots$$

となる。よって $f(z)$ は

$$f(z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(z-i)^2} - \frac{i}{4}\frac{1}{(z-i)} + \frac{3}{16} + \cdots - \frac{ni^n}{4 \cdot 2^n}(z-i)^{n-2} + \cdots$$

とローラン展開できる。

(2) $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよ。

(1) の結果より $\mathrm{Res}\,(i) = -\dfrac{i}{4}$ である。C の内部にある特異点は i のみなので留数定理より

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\,(i) = -\frac{2\pi i^2}{4} = \frac{\pi}{2}$$

である。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学科		在籍番号		氏名	

(3)　s を長さによるパラメータとする。Γ を s を用いて表示すると $\Gamma = \left\{ Re^{i\frac{s}{R}} \;\middle|\; 0 \leqq s \leqq \pi R \right\}$ となる。このとき $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)dz$ を求めよ。変形の途中で三角不等式 $|X| - |Y| \leqq |X+Y| \leqq |X| + |Y|$ を用いてもよい。

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leqq \int_0^{\pi R} \left| f(z) \right| ds$$

が成立している。

$$\left| z^2 + 1 \right| \geqq \left| z^2 \right| - \left| 1 \right| = \left| z \right|^2 - 1$$

が成立するが，Γ 上では $|z| = R$ なので $\left| z^2 + 1 \right| > R^2 - 1$ が成立する。これより R 上では

$$\left| f(z) \right| = \left| \frac{1}{(z^2+1)^2} \right| = \frac{1}{\left| z^2 + 1 \right|^2} \leqq \frac{1}{(R^2-1)^2}$$

が成立する。よって

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leqq \int_0^{\pi R} \left| f(z) \right| ds \leqq \int_0^{\pi R} \frac{1}{(R^2-1)^2} ds = \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}$$

となる。

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} = 0$$

より

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)dz = 0$$

となる。

(4)　I を求めよ。

$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_L f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = I$ なので

$$\lim_{R\to\infty} \int_C f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)dz + \lim_{R\to\infty} \int_L f(z)dz$$

より

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_C f(z)dz$$

となるが，$\displaystyle\int_C f(z)dz$ は R によらず $\dfrac{\pi}{2}$ なので

$$I = \frac{\pi}{2}$$

である。