

- 注意: ・ 答えは日本語として理解可能なものである事。数式に対し説明が必要な場合に、数式のみで説明がないときには仮に数式が正しくても満点とならないことがある。
- ・ 採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては白紙答案より低い点数になる場合がある。careless miss でそのような事はないが、「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。
- ・ 内容を理解せずに丸暗記していると判断されたものに対して大きく減点することがあるので注意すること。
- ・ 在籍番号欄について：再履修者は 10 桁の在籍番号を書く事。1 年生は出席番号 (多くは 2 桁) でよい。

1 関数 $y = f(z)$ が $z = a$ のまわりで

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

とローラン展開されているとする。 a を中心とする半径 r の円を C とするとき、

$$I = \int_C f(z) dz$$

を計算することを考える。ただし、ローラン級数が項別積分可能なこと、即ち

$$\int_C f(z) dz = \cdots + \int_C \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} dz + \cdots + \int_C \frac{a_{-1}}{z-a} dz + \int_C a_0 dz + \int_C a_1(z-a) dz + \cdots + \int_C a_n(z-a)^n dz + \cdots$$

となることは使用してよい。

(1) 自然数 n に対し $\int_C a_n(z-a)^n dz$ を計算せよ。

(2) 2 以上の自然数 n に対し $\int_C \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} dz$ を計算せよ。

(3) I を計算せよ。

裏にも問題あり。別紙にも問題あり

学 科		在 番 籍 号		氏 名	
--------	--	------------------	--	--------	--

2 $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos \theta} d\theta$ を複素積分を利用して求める。

(1) $z = e^{i\theta}$ において, I を z に関する積分 $\int_C f(z) dz$ の形に変形せよ。

(2) z の特異点の 1 つを a とする (特異点が複数ある場合 a として何を選んでもよい)。 $f(z)$ を $z = a$ のまわりでローラン展開せよ。

(3) I を求めよ。

- 3 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$ を複素積分を利用して求める。 $R > 1$ とするとき、 $\Gamma = \{ Re^{it} \mid 0 \leq t \leq \pi \}$ 、 $L = \{ x + 0i \mid -R \leq x \leq R \}$ 、 $C = \Gamma \cup L$ とおく。ただし、 L の向きは $-R$ から R に向かう向き、 Γ の向きは R から $-R$ に向かう向き、 C の向きは L と Γ の向きから決まる向きとする。 $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ とおくと、

$$\int_C f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz + \int_L f(z) dz$$

が成立している。

- (1) z の特異点の 1 つを a とする (特異点が複数ある場合 a として何を選んでよい)。 $f(z)$ を $z = a$ のまわりでローラン展開せよ。

- (2) $\int_C f(z) dz$ を求めよ。

裏にも問題有り。別紙にも問題あり

学 科		在 番 籍 号		氏 名	
--------	--	------------------	--	--------	--

(3) s を長さによるパラメータとする。 Γ を s を用いて表示すると $\Gamma = \left\{ Re^{i\frac{s}{R}} \mid 0 \leq s \leq \pi R \right\}$ となる。このとき $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz$ を求めよ。変形の途中で三角不等式 $|X| - |Y| \leq |X + Y| \leq |X| + |Y|$ を用いてもよい。

(4) I を求めよ。