線形解析 I

2001–9–14　　河野

学科	在籍番号	氏名

問題は各人異なっているので，提出時に回答用紙に問題用紙をホッチキスでとめて両方提出する事。氏名は回答用紙・問題用紙両方に書く事。

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。

1 ベクトル空間 $V = \{ (x,y,z,w) \in \boldsymbol{R}^4 \mid \ x+2y+3z+4w=0 \}$ の基底候補を自分で 1 つ選び出し，次を示せ。ただし，基底候補の 1 番目のベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = (4,0,0,-1)$ とする。

(1) それらが，一次独立である事を示せ。

(2) それらが，V を生成する事を示せ。

2 V を微分方程式 $y''-2y'+2y=0$ の解全体の作るベクトル空間とする。y_1 を $y_1(0)=1, y_1'(0)=1$ をみたす V の元，y_2 を $y_2(0)=1, y_2'(0)=-1$ をみたす V の元とする。このとき次の問に答えよ。ただし次の定理は使用してよい。

『2 階の (定係数) 線型微分方程式 $y''+ay'+by=0$ を考える。2 個の初期値 $y(0)=b_0, y'(0)=b_1$ を与えたとき，それを初期値に持つ微分方程式の解関数が唯一つ存在する。』

(1) y_1, y_2 が 1 次独立であることことを示せ。

(2) V の任意の 元 y に対しある実数 a, b が存在して $y = ay_1 + by_2$ となることを示せ。

(3) 次元の定義を述べ，V の次元を求めよ。

(4) V から V への写像 D を関数に対しその導関数を対応させる写像とする。D が実際に V への写像であることを示せ。

(5) D が線型写像である事を示せ。

3 次から 1 題を選択して解け。ただし，$\mathbf{0}$ は零ベクトルとする。

(1) ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し，$(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$ が成立する。

(2) ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し，$0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ が成立する。

(3) 任意のスカラー α に対し，$\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ が成立する。

4 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ (10)。