線形解析 II テスト $\boxed{1}$

2002–1–24　　河野

問題は複数ある。解答用紙の先頭に大きくテスト問題番号 (見出しの直後に箱で囲んで書いてある数字) を書くこと。書いていない場合は採点不能のため**零点**になるので注意すること。

1 V を微分方程式 $y'' + 1y' + 2y = 0$ の解全体の作るベクトル空間とする。y_1 を $y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 3$ をみたす V の元，y_2 を $y_2(0) = 3,\ y_2'(0) = 1$ をみたす V の元とする。また V から V への写像 D を関数に対しその導関数を対応させる写像とする。このとき次の問に答えよ。ただし次の定理は使用してよい。
『2 階の (定係数) 線型微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ を考える。2 個の初期値 $y(0) = b_0, y'(0) = b_1$ を与えたとき，それを初期値に持つ微分方程式の解関数が唯一つ存在する。』
(1) y_1, y_2 が 1 次独立であることことを示せ。
(2) D が線型写像である事を示せ。
(3) D の基底 y_1, y_2 に関する表現行列を求めよ。

2 次の 4 次の行列について問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) の行列 A の階数を求めよ。
(2) A の行列式を計算せよ。

3 次の方程式に解が存在するための条件を求めよ (a, b, c は定数)。また解空間が何次元か調べよ。

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +ax_4 & = 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 1 \\ bx_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 2 \\ cx_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 2 \end{array}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次から1題選択して答えよ。

(1) 2項数ベクトル2個の組に対しスカラーを対応させる写像 $D(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ が多重線型性と交代性をもち，単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に対し $D(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = a$($a$ はある定数) となる。$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ とおくとき，$D(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ を p, q, r, s, a を用いて表せ。

(2) $m \times n$ 行列 A を縦ベクトルを用いて $A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ と表す。この $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ のなかの一次独立なベクトルの最大個数 r と $I_A = \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^m \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ の次元 $s = \dim I_A$ が等しい事を示せ。

(3) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{K}^n$ のベクトルとする。$\boldsymbol{v}_1 \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立な事は $\det(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \neq 0$ であるための必要十分条件である事を示せ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 授業についての感想，数学について思う事などがあれば記せ。

注意: 「答」そのものは採点の対象にはしない。「答」に至る過程を採点の対象にする。したがって，答案は単に「答」を書くだけでなく,「答」に至るまでの経緯を論理的に論述する事。

答案作成は数式も含め作文であるから，主語・述語・テニヲハ・句読点等に十分注意する事。

採点は減点法を採用する。つまり間違いの内容によっては**白紙答案より低い点数になる**場合がある。careless miss でそのような事はないが,「分からなくても適当に何か書いておけ」という姿勢で回答するとそうなることがある。